

1. El número real.

1. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - \frac{1}{6} + \frac{7}{6} \left(-\frac{2}{5} + \frac{1}{2}\right) \frac{3}{2} =$

b) $\left(5,3\overline{24} - 3\right)^2 + 10,3 - 6,24 + 1,6\overline{2} =$

2. Aproxima el número $2,\overline{7}$ hasta las milésimas e indica el error absoluto y el relativo cometidos al aproximar. Da una cota razonable de esos errores.

3. ¿Qué error absoluto se comete si como aproximación de $\frac{14}{3}$ se toma el número 4,67? ¿Qué error relativo? Indica una cota razonable de esos errores.

4. Aproxima $\sqrt{7}$ hasta las diezmilésimas y señala una cota del error absoluto y del relativo.

5. Calcula con tres cifras decimales exactas $\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} + 2\pi + \sqrt{2}$, sabiendo que $\pi = 3,14159\dots$ y que $\sqrt{2} = 1,4142\dots$

6. Realiza las siguientes operaciones con potencias:

a) $(-3)^{-2} + 5 \cdot 3^2 - (-2)^0 - 2^4 - 2^3 + 3^4 \cdot 3^{-2} - 3^{-3}$

b) $(-3)^3 \cdot 2^{-4} - 2^2 + (-3)^0 - (-2)^4 - (-3)^5 + (-2)^{-3}$

7. Simplifica las siguientes expresiones con potencias:

a) $\frac{2^5 \cdot 15^{-2} \cdot (-3^2)^2}{10^{-4} \cdot 9^2}$

b) $\left[\frac{(-2)^0 \cdot 3^5 \cdot 15^{-2}}{3^{-4} \cdot (-8)^3} \right]^3 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)^{-2}$

c) $\frac{a^7 \cdot (ab)^{-3}}{(a^2)^2 \cdot b^5 (a^2 b)^{-2}}$

d) $\left[\frac{-a^2 (b^{-2})^3 (-ab)^{-4}}{a^{-2} (-b)^5 (-a^2)} \right]^5$

8. Halla todas las raíces posibles de:

a) $\sqrt[4]{0,0016}$

b) $\sqrt[5]{-\frac{243}{32}}$

c) $\sqrt[3]{\frac{125}{8}}$

d) $\sqrt[6]{-64}$

9. Simplifica los siguientes radicales:

a) $\sqrt{2500}$

b) $\sqrt[3]{8000}$

c) $\sqrt{x^{-10} y^4}$

d) $\sqrt[4]{6480}$

e) $\sqrt{\sqrt{x}}$

f) $\sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x}}}$

g) $\sqrt[3]{15x^5 \cdot \sqrt{3x}}$

h) $\sqrt{9x^2 + 12x + 4}$

10. Efectúa las operaciones siguientes:

a) $\sqrt{15} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[5]{100}$

b) $\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt{2}}$

c) $\sqrt[4]{6x^2 y} \cdot \sqrt[6]{2xy^5 z}$

d) $\frac{\sqrt[3]{2xyz^2}}{\sqrt[4]{x^3 y^2}}$

e) $(\sqrt{2} - \sqrt{5})(2 + \sqrt{5})$

f) $(5\sqrt{7} - 2\sqrt{2})^2$

11. Calcula:

a) $\sqrt{150} + \sqrt{96} - \sqrt{6} + \sqrt{486} - \sqrt{48}$

b) $\frac{\sqrt[4]{486}}{\sqrt[4]{3}} + \sqrt[4]{125} \cdot \sqrt[4]{10} - \sqrt{\sqrt{6561}} + \sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{625}$

$$\text{c)} \sqrt{12a} - 3\sqrt{75a^3} + 2\sqrt{3a} - a\sqrt{48a}$$

$$\text{d)} \sqrt[4]{16a^5b^{10}} - \sqrt[4]{81a^4} - 3\sqrt[8]{a^{10}b^{20}} - \sqrt[4]{a^2b} - 2\sqrt[4]{a^5b^6}$$

12. Simplifica:

$$\text{a)} \frac{\sqrt[4]{15} \cdot \sqrt[3]{18}}{\sqrt[3]{20}}$$

$$\text{b)} \left[\frac{(\sqrt{6})^3 \cdot \sqrt[6]{45}}{4 \cdot \sqrt[4]{50}} \right]^3$$

$$\text{c)} \left[\frac{\sqrt[3]{ab^2} \cdot \sqrt[4]{a^3b}}{(\sqrt[6]{a^{-5}})^2 \cdot \sqrt[5]{a^2b}} \right]^{-4}$$

$$\text{d)} \frac{a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{3}{2}} \cdot c^2 \cdot a^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{2}} \cdot \left(a^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{5}{2}} \cdot c^{\frac{5}{3}}}$$

$$\text{e)} \frac{\pi^{\frac{5}{2}} \cdot (7^2)^{\frac{1}{3}}}{(\pi^2)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(7^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\text{f)} \frac{25^{\frac{1}{2}} - 3^{-2}}{3^4 + 5^{-1}}$$

13. Racionaliza las expresiones siguientes:

$$\text{a)} \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$\text{b)} \frac{8}{3\sqrt{5}}$$

$$\text{c)} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[5]{2^3}}$$

$$\text{d)} \frac{x}{\sqrt[5]{x^2y^3}}$$

$$\text{e)} \frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$$

$$\text{f)} \frac{3}{4-\sqrt{3}}$$

$$\text{g)} \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}+3}$$

$$\text{h)} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2\sqrt{3}}$$

$$\text{i)} \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

$$\text{j)} \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

14. Calcula:

$$\text{a)} \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3^2}} + 2\sqrt[3]{5} - \frac{\sqrt[6]{4}}{\sqrt[6]{3^4}} + 3 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}}$$

$$\text{b)} \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$$\text{c)} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

$$\text{d)} 98^{\frac{1}{2}} - 48^{\frac{1}{2}} + 18^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{e)} \frac{2\sqrt[3]{81} - 3\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{192}}{\sqrt[3]{3}}$$

$$\text{f)} \frac{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}+3\sqrt{2}} - \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

15. a) Expresa en notación científica 0,000 000 000 325 y aproxímallo por un número con dos cifras significativas. ¿Cuál es el orden de magnitud?

b) Aproxima el número 5 843 729 545 221 hasta los miles de millón y expresa la aproximación en notación científica.

c) Calcula $\frac{5,34 \cdot 10^{-5} - 2,46 \cdot 10^{-3}}{300000 + 4,2 \cdot 10^4}$ expresando el resultado en forma decimal y en notación científica.

16. La velocidad mínima que debe llevar un cuerpo para que escape del campo gravitatorio terrestre es

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

en la que G es la constante de gravitación universal, M la masa de la Tierra y R el radio de la Tierra. Calcula v sabiendo que: $G=6,67 \cdot 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{Kg}^2$, $M=5,98 \cdot 10^{24} \text{Kg}$ y $R=6,37 \cdot 10^6 \text{m}$.

17. Representa gráficamente sobre la recta real, de forma exacta, los siguientes números:

$$5, -1, \frac{2}{5}, -\frac{2}{3}, \frac{11}{4}, 0, \bar{3}, \sqrt{6}, -\sqrt{10}$$

18. Representa sobre la recta real los siguientes intervalos:

$$\text{a)} A=[-5, -3] \quad \text{b)} B=[2, 7] \quad \text{c)} C=[-4, 5] \quad \text{d)} D=[-3, 9] \quad \text{e)} E=(-\infty, 3] \quad \text{f)} F=[7, \infty)$$

Halla los conjuntos de puntos $A \cup C$, $A \cup B$, $B \cup F$, $A \cup D$, $A \cup E$, $B \cup C \cup E$, $C \cap D$, $E \cap F$, $B \cap F$, $A \cap D$, $A \cap E$, $A \cap B \cap C$.

Indica, para cada conjunto, algunas cotas superiores e inferiores, el supremo, el ínfimo, el máximo y el mínimo (si es que existen).

19. a) Indica qué intervalo es el entorno simétrico abierto de centro 2,4 y radio 3. Representalo gráficamente sobre la recta real.

- b)** Representa gráficamente el entorno reducido de centro -5 y radio $1,3$. ¿Qué conjunto de puntos forman ese entorno?
- c)** Dibuja sobre la recta real el entorno abierto de centro 8 y radio $-0,5$.
- d)** Representa gráficamente el conjunto de puntos $\{x \in \mathbb{R} / |x-5| < 2\}$. Exprésalo en forma de intervalo.
- 20.** **a)** Halla el centro y el radio del entorno $(-9, -2)$. Representalo.
- b)** ¿Qué conjunto de puntos forman el entorno reducido del mismo centro y radio que el entorno anterior?
- c)** Halla el centro y el radio del entorno $[-4, 7]$.
- d)** ¿Qué entorno es el conjunto $\{x \in \mathbb{R} / 0 < |x+1| < 3\}$? Representalo gráficamente.
- 21.** Desarrolla las siguientes potencias:
- a)** $(3+2\sqrt{5})^4$ **b)** $(2ab-b^3)^5$ **c)** $(-x+2)^6$ **d)** $(-\sqrt{6}-\sqrt{2})^{10}$
- 22.** **a)** Escribe el duodécimo término del desarrollo de la potencia $\left(4x^2 + \frac{2}{x}\right)^{20}$.
- b)** ¿Cuál es el coeficiente de x^6 en el desarrollo de la potencia anterior?
- 23.** Determina los siguientes logaritmos utilizando la calculadora:
- a)** $\log 26,4$ **b)** $\ln 724$ **c)** $\log_5 0,16$ **d)** $\log_2 (-4)$
- 24.** Sin emplear la calculadora, halla el valor de x en los siguientes casos:
- a)** $x = \log_5 \sqrt{125}$ **b)** $x = \log_3 \frac{1}{81}$ **c)** $x = \log_{\frac{1}{2}} 1024$ **d)** $x = \log_4 \frac{16}{\sqrt[4]{64}}$
- 25.** Halla el valor de x en los siguientes casos:
- a)** $\log_7 x = -5$ **b)** $\log_2 x = \frac{2}{3}$ **c)** $\log_5 x = 0$ **d)** $\log_3 x = -\frac{2}{5}$
- 26.** Halla el valor de x en los siguientes casos:
- a)** $\log_x 81 = -4$ **b)** $\log_x 1 = 0$ **c)** $\log_x 10000 = 2$ **d)** $\log_x \frac{1}{36} = -2$
- 27.** Indica entre qué valores enteros están los siguientes logaritmos:
- a)** $\log 5$ **b)** $\log 147,5$ **c)** $\log 0,0019$
- 28.** ¿Entre qué valores está x en los siguientes casos?
- a)** $\log x = 2,61$ **b)** $\log x = 0,5$ **c)** $\log x = -3,1$
- 29.** Aplica las propiedades de los logaritmos para desarrollar las siguientes expresiones:
- a)** $A = \frac{5x^2 y}{3z}$ **b)** $P = \frac{M+N^3}{\sqrt{2M^2 N^5}}$
- 30.** Aplica las propiedades de los logaritmos para eliminarlos de las siguientes expresiones:
- a)** $\log M = n \log P - 2 \log Q + \log R$ **b)** $3 \log x - 4 \log y = \log z + 2 \log t$

2. Ecuaciones, sistemas e inecuaciones.

1. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\left(3x^4 - 6x^2 - \frac{1}{2}x + 4\right)(x^4 + 3x^3 - 2) - (5x^3 - 2)^2$

b) $6x^2 + 5x - 1 - (2x^3 + x^2 + 3)\frac{1}{3}x^2 + 4x$

c) $(4x^3 - 4x + 1)^2 + 5x - 3(2x + 5)^4$

2. Halla el cociente y el resto de la división $(4x^5 - 2x^4 + x^2 - 5) : (-2x^3 - 2x + 1)$

3. Al dividir un polinomio por $x^2 - 1$ se ha obtenido $x + 3$ en el cociente y $x - 2$ en el resto. ¿Cuál es ese polinomio?

4. Halla el valor que debe tener m para que el resto de la división $(3x^3 + mx^2 + x - 4) : (x - 3)$ sea igual a 5.

5. Calcula m para que el polinomio $x^3 - mx^2 + 5x - 2$ sea divisible por $x + 1$.

6. a) Escribe un polinomio que tenga las raíces 4 (doble), -3 y -1 .

b) Escribe un polinomio de tercer grado que tenga una sola raíz real (simple).

7. Descompón en factores:

a) $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12$

b) $2x^3 - 5x^2 - 23x - 10$

c) $3x^4 + x^3 - 9x^2 - 9x - 2$

d) $15ab^2c - 10a^2b^2c^2 + 20ab^3$

e) $9a^2 - 25b^6$

f) $16x^4 - 40x^2 + 25$

8. Escribe un polinomio de 2º grado tal que $P(-4) = 0$ (es decir, -4 es raíz de $P(x)$) y $P(-2) = -8$.

9. Inventa dos polinomios cuyo máximo común divisor sea $x(x+1)$ y cuyo mínimo común múltiplo sea $x^3(x^2-1)(x^2+1)$.

10. Simplifica:

a) $\frac{ax + a}{a^2x + a^2}$

b) $\frac{x^2 - 1}{x^4 - 1}$

c) $\frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{3x^2 - 9x + 6}$

d) $\frac{10x^4 + 13x^3 - 3x^2}{10x^4 + 15x^3}$

e) $\frac{4x}{4x^2 - 6x}$

f) $\frac{x^2 - x - 48}{x^2 - 8x + 7}$

g) $\frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 + 4x + 4}$

h) $\frac{mx^2 - 25m}{m^3x^2 + 25m^3 - 10m^3x}$

11. Opera y simplifica:

a) $\left(\frac{5+x}{x^2+x} - \frac{4x}{3x+3} + \frac{x-3}{x^2-x}\right) \cdot \frac{6x^3-6x^2}{3+2x}$

b) $\frac{x-2}{2-x} - \frac{x^2}{x^2-4} - \frac{x-2}{x+2}$

c) $\frac{\frac{1}{2(x+h)} - \frac{1}{2x}}{h}$

d) $\frac{3x+2}{x-1} : \frac{4x+2}{4x} - \frac{9x+6}{2x^2-x-1} + \frac{7}{2x^2-2x}$

12. Descompón las siguientes fracciones algebraicas en suma de fracciones simples:

a) $\frac{4x^2 - 3x + 1}{x^3 - 2x^2 + x}$

b) $\frac{4}{x^2 - 3x + 2}$

c) $\frac{2x^4 - 6x^3 + 5x^2 - x - 12}{x^3 - 3x^2 + x - 3}$

d) $\frac{x^3 + 6}{x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 8x + 4}$

13. Comprueba si cada valor de x es solución de la ecuación a la que acompaña:

a) $\frac{x-3}{x+1} - \frac{2x+1}{x-3} = -\frac{11x}{x+1}$ $x=4$

b) $\frac{4}{x-2} = \frac{x+2}{2x-4}$ $x=2$

14. A partir de cada una de las igualdades dadas, obtén distintas igualdades equivalentes hasta despejar la variable indicada:

a) $F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$ (Despeja m .) b) $V = I(R+r)$ (Despeja r .) c) $t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$ (Despeja x .)

15. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{2x-5}{6} + \frac{1-4x}{10} = \frac{x+3}{12} - \frac{3x-2}{15}$

b) $\frac{3x-1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{4-2x}{3} - 5 \right) = \frac{4+2x}{3} - \frac{3x+1}{2}$

16. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $15x^2-3=0$ b) $4+3x^2=0$

c) $8x^2+5x=0$ d) $-x^2+6x-8=0$

17. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^4-7x^2+12=0$ b) $x^4-16=0$

c) $4x^4+3x^2-1=0$ d) $x^6-7x^3-8=0$

18. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $6x^4-3x^3-15x^2-6x=0$

b) $4x^4-20x^3+27x^2-x-10=0$

19. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x-4}{x^2-4} - \frac{2x}{x^2-x-2} = 2 - \frac{x-1}{x+1}$

b) $\frac{x}{x^2-1} - \frac{x-4}{2x+2} = \frac{x-2}{x} + \frac{2}{x^2-x}$

20. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x - \sqrt{169-x^2} = 17$

b) $\sqrt{6x+1} + \sqrt{3x-3} = 8$

21. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $|x|=23$

b) $|x|=-12$

c) $|2x+4|=8$

d) $|9-5x|=3$

22. a) Escribe una ecuación de tercer grado cuyas soluciones sean 3, 5 y -1.

b) Escribe una ecuación de tercer grado cuyas soluciones sean -2 (doble) y 4.

c) Escribe una ecuación cuyas soluciones sean 0 (triple), 2 y -3 (doble). ¿Cuál es su grado?

23. Escribe una ecuación que no tenga solución, otra con una única solución y otra con infinitas soluciones.

24. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones con dos incógnitas y clasifícalos según su número de soluciones:

a) $\begin{cases} 5x-3y=1 \\ 2x+4y=-3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+y=5 \\ 6x+2y=6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -4x+2y=-2 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 7x - \frac{1-y}{3} = 5 \\ 21x = 16-y \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2y-3(x+1)=6-(x+y) \\ \frac{x-1}{2} - \frac{y+3}{4} = -\frac{y}{2} - \frac{2-x}{2} \end{cases}$ f) $\begin{cases} 8x+7y=9 \\ 5x-y=11 \\ x+y=5 \end{cases}$ g) $\begin{cases} x+3y=10 \\ 2x-3y=2 \\ x+y=6 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x^2-3y=-8 \\ 2x+y(y-1)=8 \end{cases}$

25. Escribe las ecuaciones de dos rectas en el plano secantes, luego las de dos rectas paralelas, y, por último, las de dos rectas coincidentes.

26. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones con tres incógnitas y clasifícalos:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \left\{ \begin{array}{l} 3x + y - z = 1 \\ 2x - y + z = 0 \\ x + y - z = 3 \end{array} \right. & \text{b)} \left\{ \begin{array}{l} 2x - 3y + 2z = -2 \\ 4x - 2y + 3z = 0 \\ -3x + 2y + 3z = -5 \end{array} \right. & \text{c)} \left\{ \begin{array}{l} 2x + y - z = 0 \\ x - 2y + z = 5 \end{array} \right. \end{array}$$

27. Un rectángulo tiene la misma área que un cuadrado de 96 m de lado; halla las dimensiones del rectángulo si la altura es los $9/16$ de la base.

28. Calcula los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 10 cm, sabiendo que uno de los catetos es la semisuma de la hipotenusa y el otro cateto.

29. Halla dos números impares consecutivos tales que la diferencia de sus cuadrados sea 8000.

30. La nota media de los aprobados en un examen de matemáticas fue 6,5 y la de los suspensos, 3,2. En la clase son 30 alumnos y alumnas y la nota media global fue 5,29. ¿Cuántos aprobaron y cuántos suspendieron?

31. Un hombre le dijo a su hijo: Cuando transcurra la tercera parte de los años que yo tengo, tú tendrás la mitad de mi edad actual. Sí, contestó el hijo, pero hace sólo 4 años, tu edad era 11 veces la mía. ¿Cuál es la edad actual del hijo?

32. El lunes acudió mi padre a la cafetería y por dos helados, un café y cuatro pasteles pagó 16 €; el martes en el mismo sitio, mi madre pagó otros 16 € por tres helados, dos cafés y dos pasteles y ayer, jueves, yo pagué 32 € por tomar cuatro helados y tres cafés. Considerando que los productos del mismo tipo tenían igual precio ¿crees que es posible?

33. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} 4^{x+3} = 2^{5x} & \text{b)} 25^{3x-5} = \frac{1}{5^{2x-1}} \\ \text{c)} \left(\frac{1}{81}\right)^{2x-1} = 27^{5x+3} & \text{d)} 125^{3x-1} = \sqrt[3]{25^x} \\ \text{e)} \sqrt{27^{x+6}} = 81^{5x-3} & \text{f)} 15^{4x+7} = 2 \\ \text{g)} 4^{5x+3} = 27^x & \text{h)} 2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} + 2^{x-4} = 960 \\ \text{i)} 3^{2x+2} - 28 \cdot 3^x + 3 = 0 & \text{j)} 4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0 \end{array}$$

34. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \log x = 1 + \log(22 - x) & \text{b)} \log x^3 = \log 6 + 2 \log x \\ \text{c)} 2 \log(x + 5) - \log(3x - 5) = 1 & \text{d)} \frac{1}{2} \log(3x + 40) - \log(4x + 20) = \log \frac{1}{10} \\ \text{e)} \frac{1}{2} \log(3x + 1) - \frac{1}{2} \log(2x - 3) = 1 - \log 5 & \text{f)} \frac{\log 2 + \log(11 + x^2)}{\log(5 - x)} = 2 \end{array}$$

35. Resuelve los siguientes sistemas:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \left\{ \begin{array}{l} 5^{x+y} = 32,6 \\ 6^x = 7^y \end{array} \right. & \text{b)} \left\{ \begin{array}{l} 2^x - 4^{2y} = 0 \\ x - y = 15 \end{array} \right. & \text{c)} \left\{ \begin{array}{l} x^2 - y^2 = 11 \\ \log x - \log y = 1 \end{array} \right. \\ \text{d)} \left\{ \begin{array}{l} \log x = \log 2y + \log 6 - \log 3 \\ 2 \log x = 3 \log y - 2 \log y \end{array} \right. & \text{e)} \left\{ \begin{array}{l} \log(x + y) + \log(x - y) = \log 33 \\ e^x = \frac{e^{11}}{e^y} \end{array} \right. & \text{f)} \left\{ \begin{array}{l} \log x + 3 \log y = 5 \\ \log \frac{x}{y} = 3 \end{array} \right. \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{g)} \quad 2\log 5 + y\log 25 = x\log 125 \\ \quad \quad x\log 4 - 2y\log 8 = \frac{1}{2}\log 64 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \text{h)} \quad \log x - \log y = \log 56 - \log 20 \\ \quad \quad \log x + \log y = 1 + \log 7 \end{array} \right\} \quad \text{i)} \quad \left. \begin{array}{l} \log_y (9-x) = \frac{1}{2} \\ \log_x (y+9) = 2 \end{array} \right\}$$

36. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa gráficamente el conjunto solución:

a) $6x-5 \geq x+3$

b) $3x-9 < 8+10x$

c) $\frac{x+4}{3} - \frac{x-4}{5} > 2 + \frac{3x+1}{15}$

d) $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(\frac{x+2}{4} - \frac{3x-1}{2} \right) \geq \frac{x}{6} - \frac{2x-1}{3}$

e) $\frac{x+5}{3} - \frac{2}{3} \left(\frac{4x-1}{2} - \frac{3x+2}{3} \right) \leq \frac{1}{6} - \left(\frac{2x-1}{3} - \frac{7x}{4} \right)$

37. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\left. \begin{array}{l} 4x-8 \leq \frac{x+4}{2} - 5x \\ 3x-2 \left(x - \frac{x+1}{3} \right) > 6 \end{array} \right\}$

b) $\left. \begin{array}{l} -\frac{x}{2} - (5x+2) < 8x+5 \\ 3x + \frac{6-x}{4} > 2 - \frac{x-5}{2} \end{array} \right\}$

c) $\left. \begin{array}{l} 7-x+2(x-3) \leq 4x \\ \frac{3x+1}{5} \leq \frac{x-4}{2} \end{array} \right\}$

38. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa gráficamente el conjunto solución:

a) $x^2+2x-8 > 0$

b) $-2x^2+9x-4 < 0$

c) $3x^2-15x \leq 0$

d) $\frac{x-4}{2} - x(x+2) < 3x-36$

39. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa el conjunto solución:

a) $\frac{2x-6}{x+2} > 0$

b) $\frac{x+1}{2x-1} \geq 1$

c) $\frac{x^2+x-2}{2x-4} \leq 0$

d) $\frac{2x+4}{x^2+x-12} \geq 0$

40. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\left. \begin{array}{l} 2x^2 < 8 \\ x^2+2x-3 \geq 0 \end{array} \right\}$

b) $\left. \begin{array}{l} x^2-4x+4 > 0 \\ \frac{x+3}{x+2} \geq 0 \end{array} \right\}$

c) $\left. \begin{array}{l} \frac{4x-1}{x+3} \leq 2 \\ \frac{x^2-9}{x+2} \leq 0 \end{array} \right\}$

41. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $2x-4y-3 < 0$

b) $x+5y-5 \geq 0$

c) $3x + \frac{y}{2} \leq 2(x+y)$

d) $4x+2 > \frac{y-1}{2} + x$

42. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\left. \begin{array}{l} 4x-2y > 5 \\ x+y-3 < 0 \end{array} \right\}$

b) $\left. \begin{array}{l} x-6y+3 \leq 0 \\ 2x-y \geq 8 \end{array} \right\}$

c) $\left. \begin{array}{l} \frac{3y}{2} + 5 > x - \left(y + \frac{1}{2} \right) \\ \frac{x-5}{2} \leq \frac{y+1}{3} \end{array} \right\}$

43. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $|x| < 9$

b) $|x| \geq 7$

c) $|x+10| \leq 4$

d) $|x-25| > 10$

e) $|8-3x| < 2$

f) $|6+4x| \geq 5$

3. Trigonometría.

- En una circunferencia de 16 m de radio, un arco mide 2 m. Halla su ángulo central correspondiente expresado en radianes, en grados sexagesimales y en grados centesimales.
- Dados los ángulos $\alpha=123^\circ 42' 24''$ y $\beta=72^\circ 34' 41''$, calcula $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$, 4α y $\alpha/4$.
- Expresa el ángulo $23,57^\circ$ en grados, minutos y segundos.
 - Expresa el ángulo $14^\circ 21' 36''$ en grados.
 - Expresa en radianes $33^\circ 45'$.
 - Expresa en grados sexagesimales $\pi/6$ radianes.
- Halla las razones trigonométricas del ángulo α de la figura adjunta:
- Dado $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, halla las restantes razones trigonométricas de α .
- Si $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$ y $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, halla las restantes razones trigonométricas de α .
- Halla el resto de razones trigonométricas del ángulo α con los datos $\operatorname{cosec} \alpha = -\frac{5}{4}$ y $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.
- Si $\cotg x = -2$, calcula las demás razones trigonométricas del ángulo x .
- Halla:

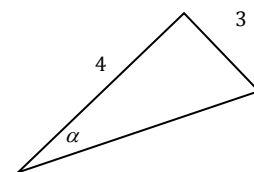
a) $\cos 135^\circ$	b) $\operatorname{tg} 210^\circ$	c) $\sec\left(-\frac{\pi}{4}\right)$
d) $\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right)$	e) $\operatorname{cosec}(-225^\circ)$	f) $\cotg(-90^\circ)$
- Refiere a ángulos del primer cuadrante las siguientes razones trigonométricas:

a) $\sec 245^\circ$	b) $\operatorname{sen} 1275^\circ$	c) $\cos 349^\circ$	d) $\operatorname{cosec} 416^\circ$
----------------------------	---	----------------------------	--
- Si $\sec \alpha = \frac{3}{2}$ y α es un ángulo del primer cuadrante, calcula:

a) $\cos(\alpha+\pi)$	b) $\cos(2\pi-\alpha)$	c) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$	d) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$
------------------------------	-------------------------------	---	---
- Si $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{5}$, halla:

a) $\operatorname{tg}(-\alpha)$	b) $\cotg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$	c) $\operatorname{tg}(\pi+\alpha)$	d) $\cotg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$
--	--	---	--
- Efectúa las operaciones siguientes:

a) $\sqrt{2} \cos \frac{5\pi}{4} + \sqrt{3} \operatorname{sen} \frac{7\pi}{6} - \cos \pi$	b) $\cos \frac{5\pi}{3} - \sqrt{3} \operatorname{sen}^2 \frac{5\pi}{4} + \sqrt{27} \cos 0$
--	---



c) $\frac{\sin 120^\circ + \cos 240^\circ}{\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 330^\circ}$

d) $\frac{2 \sin^2 \frac{\pi}{6} \cdot \cos^2 \pi}{4 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cdot \sin^2 \frac{3\pi}{4}}$

14. Simplifica:

a) $\frac{1 + \sec x}{1 - \sec x}$

b) $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha}{\sec \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha}$

c) $\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha}$

15. Comprueba si son ciertas las siguientes igualdades:

a) $\frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$

b) $\operatorname{cotg}^2 x - \cos^2 x = \operatorname{cotg}^2 x \cdot \cos^2 x$

c) $\frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{cotg} x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}$

16. Sabiendo que $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ y que $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, halla $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ y $\operatorname{tg} 2\alpha$.

17. Halla $\sin 3x$ si $\sin x = 3/5$ y x es un ángulo del primer cuadrante.

18. Comprueba si son ciertas las siguientes igualdades:

a) $\frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \sin x$

b) $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \operatorname{cotg} x$

c) $\operatorname{tg}(45^\circ + x) = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$

19. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}$

b) $\frac{\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$

c) $\frac{\sin(a+b) \cdot \sin(a-b)}{\cos a + \cos b}$

20. El ángulo C de un triángulo ABC mide 60° . Calcula los ángulos A y B del mismo sabiendo que $\sin A + \sin B = 3/2$.

21. Si $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 4$ y $\operatorname{tg} \alpha = -2$, calcula $\operatorname{tg} 2\beta$ y $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$.

22. Sabiendo que $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, calcula el valor de $\frac{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ}{\cos 75^\circ + \cos 15^\circ} \cdot \operatorname{tg} 30^\circ$.

23. Simplifica:

a) $\cos(\pi - \alpha) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) + \sin(\pi - \alpha) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)$

b) $(\operatorname{cotg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha) \cdot \left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \right]$

24. Calcula el seno y el coseno de 105° .

25. Halla las razones trigonométricas de $67^\circ 30'$ sabiendo que $\operatorname{tg} 135^\circ = -1$.

26. Demuestra: $\sec^2(a + 45^\circ) - \sec^2(a - 45^\circ) = 4 \operatorname{tg} 2a \sec 2a$

27. Resuelve las ecuaciones siguientes, siendo $0 < x < 2\pi$

a) $\cos x = -\frac{1}{2}$

b) $\sin\left(x + 20^\circ\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\operatorname{cotg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{3}$

e) $\operatorname{tg} x = -1$

f) $\sin 2x = 0,6$

28. Halla el valor de x en los siguientes casos:

a) $\arcsen \frac{\sqrt{3}}{2} = x$

b) $x = \arctg(-1)$

c) $x = \arccos 0$

29. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2 \cos x = 3 \operatorname{tg} x$

b) $\cos 2x + \sin x = 4 \sin^2 x$

c) $2 \cos 2x - \sin x = \frac{1}{2}$

d) $\sin 2x \cdot \cos x = 6 \sin^2 x$

e) $\frac{\operatorname{tg} x + 1}{1 - \operatorname{tg} x} = -\sqrt{3}$

f) $\sin^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2}$

30. Resuelve los siguientes sistemas:

a)
$$\left. \begin{aligned} x - y &= \frac{\pi}{4} \\ \operatorname{tg} x &= \frac{1}{\operatorname{tg} y} \end{aligned} \right\}$$

b)
$$\left. \begin{aligned} \sin x \cdot \cos y &= \frac{3}{4} \\ \cos x \cdot \sin y &= \frac{1}{4} \end{aligned} \right\}$$

c)
$$\left. \begin{aligned} \sin^2 x - \cos^2 y &= 0,75 \\ \sin^2 x + \cos^2 y &= 1,25 \end{aligned} \right\}$$

d)
$$\left. \begin{aligned} \sin^2 x + y &= 2 \\ \cos^2 x + y &= 1 \end{aligned} \right\}$$

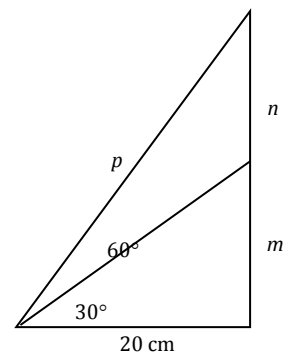
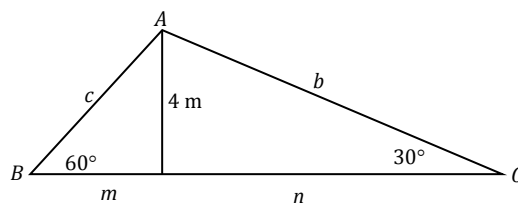
e)
$$\left. \begin{aligned} 1 - \sin x &= y \\ 1 + \sin x &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \right\}$$

f)
$$\left. \begin{aligned} \cos x + \cos(\pi - y) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\pi - x) + \cos y &= \sin 30^\circ \end{aligned} \right\}$$

31. Calcula la longitud de la sombra que proyecta un poste vertical de 2,5 metros, cuando el sol se halla a una altura de $47^\circ 10'$ sobre el horizonte.

32. Se desea medir la altura de una torre cuya base no es accesible. Desde un punto A la torre levanta 37° sobre el horizonte. Separándose 12 m más, se llega a otro punto B que levanta 28° sobre el horizonte. Halla la altura de la torre.

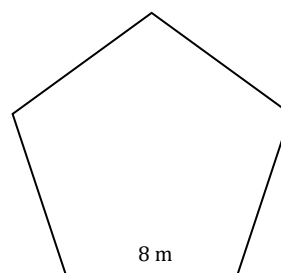
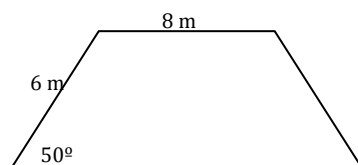
33. Halla los datos desconocidos en los siguientes triángulos:

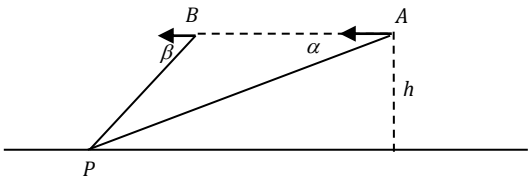
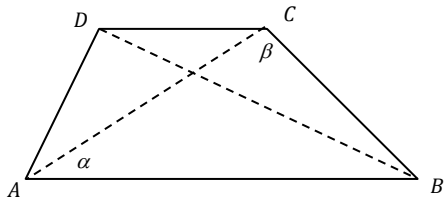


34. Calcula el área de un rectángulo si su diagonal mide 30 m y forma un ángulo de 20° con su base.

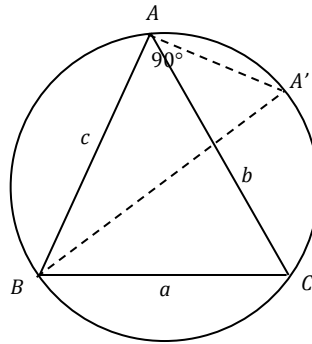
35. Halla el ángulo central que abarca una cuerda de 13 cm en una circunferencia de 24 cm de diámetro.

36. Halla el área de las siguientes figuras:

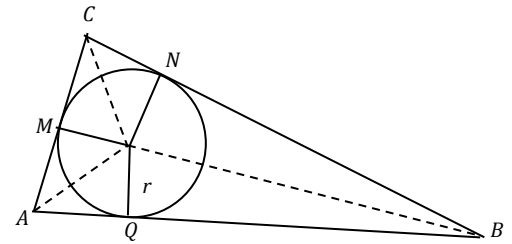


37. Una escalera de bomberos de 10 m de longitud se ha fijado en un punto de la calzada, delimitada por dos casas. Si se apoya sobre una de las fachadas forma un ángulo con el suelo de 45° y si se apoya sobre la otra fachada forma un ángulo de 30° . Halla la anchura de la calle y la altura que se alcanza con dicha escalera sobre cada una de las fachadas.
38. Desde una nave espacial se ve la Tierra bajo un ángulo de $20^\circ 9' 48''$, siendo el radio de la Tierra de 6366 Km. ¿Podrías hallar la distancia de la nave a la superficie terrestre?
39. Una avioneta sobrevuela horizontalmente un punto P , con una velocidad de 360 Km/h, según el esquema adjunto. Sabemos que $\alpha=26^\circ$, $\beta=58^\circ$ y que entre las posiciones A y B han transcurrido 4 segundos. Calcula la altura a que vuela el avión.
- 
40. La apotema de un hexágono regular mide 6 cm. Calcula la longitud de su lado y su área.
41. Resuelve los siguientes triángulos con los datos que se indican:
- | | |
|---|---------------------------------------|
| a) $B=68^\circ$, $C=53^\circ$, $a=18$ m | b) $a=15$ cm, $b=18$ cm, $C=98^\circ$ |
| c) $a=46$ cm, $b=52$ cm, $c=36$ cm | d) $a=8$ cm, $b=12$ cm, $B=150^\circ$ |
42. Un canal tiene sus orillas paralelas. Desde dos puntos A y B de una orilla se observa un punto P de la otra orilla. Las visuales forman con la dirección de la orilla ángulos de 42° y 56° , respectivamente. Calcula la anchura del canal sabiendo que la distancia entre A y B es de 31,5 m.
43. Las porterías de un estadio miden 7,8 m de largo, y sus áreas miden 39,8 m de largo por 16,5 m de ancho. ¿Con qué ángulo ve un futbolista la portería cuando saca una falta desde una de las esquinas del área?
44. Calcula la superficie de un rectángulo sabiendo que sus diagonales miden 20 cm y que forman un ángulo de 20° con la base.
45. Halla los lados y los ángulos de un rombo sabiendo que sus diagonales miden 8 cm y 6 cm.
46. Del trapecio de la figura adjunta se conocen los siguientes datos:
 $AB=5$, $BC=3$, $AC=3,5$ y $BD=5,5$
 Halla α , β , DC y AD .
- 
47. Halla los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita al triángulo dado por $a=5$ m, $b=7$ m y $C=60^\circ$.
48. En un triángulo ABC se tiene que $b=42$ cm, $c=25$ cm y $B+C=94^\circ$. Calcula los ángulos B y C .

49. Observa las figuras y averigua si son correctas las fórmulas para hallar el área del triángulo en cada caso:

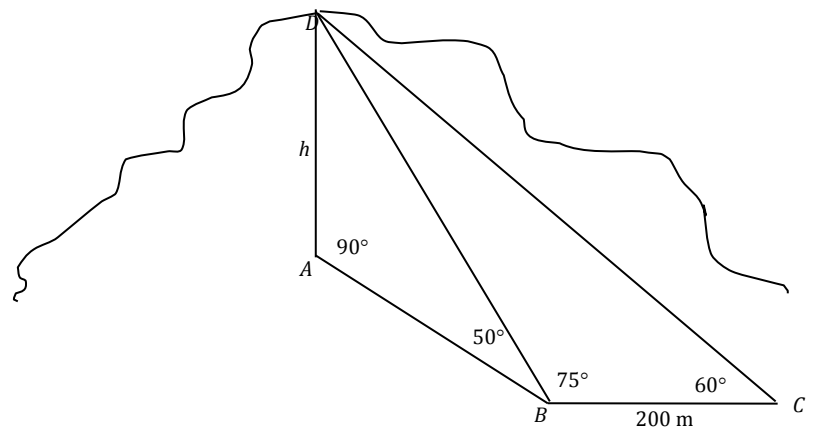


$$S = \frac{abc}{4R}$$

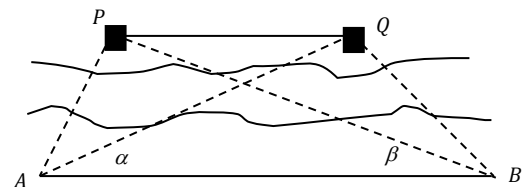


$$S = r \cdot p \text{ (} p = \text{semiperímetro)}$$

50. Determina la altura del risco de la figura adjunta.



51. Para medir la distancia entre dos casas P y Q que están en la orilla opuesta de un río, se ha realizado un croquis:
Sabemos que $AB=98$ m, $\alpha=27^\circ$, $A=98^\circ$, $\beta=35^\circ$, $B=76^\circ$.
Calcula la distancia entre las casas.



4. Números complejos.

- Calcula el módulo y el argumento de los siguientes números complejos:
a) $z = 1 + \sqrt{3}i$ **b)** $z = -\sqrt{3} - i$ **c)** $z = \sqrt{3} - \sqrt{3}i$ **d)** $z = -2 + 2\sqrt{3}i$
- Expresa de distintas formas los siguientes números complejos:
a) $z = (4, 4\sqrt{3})$ **b)** $z = -3i$ **c)** $z = 6\frac{3\pi}{4}$
d) $z = \sqrt{3}(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$ **e)** $z = -4 - 4i$ **f)** $z = 2_{330^\circ}$
- Dados los números complejos $z_1 = (5, -1)$, $z_2 = 3_{90^\circ}$, $z_3 = -1 + 3i$, haz las siguientes operaciones en forma binómica:
a) $z_1 \cdot z_2$ **b)** $z_1 \cdot z_3$ **c)** $z_2 \cdot z_3$
d) $\frac{z_1}{z_2}$ **e)** $\frac{z_2}{z_3}$ **f)** $\frac{z_3}{z_2}$
- Dados los números complejos $z_1 = 2_{45^\circ}$, $z_2 = 5_{235^\circ}$, $z_3 = -2 + 2\sqrt{3}i$, haz las siguientes operaciones en forma polar:
a) $z_1 \cdot z_2$ **b)** $z_1 \cdot z_3$ **c)** $z_2 \cdot z_3$
d) $\frac{z_2}{z_1}$ **e)** $\frac{z_2}{z_3}$ **f)** $\frac{z_3}{z_1}$
- Realiza las siguientes operaciones:
a) $\frac{i^6 + i^7}{1 + i^3}$ **b)** $\frac{i^7 - i^{-7}}{2i}$ **c)** $\frac{(5+i) - (2-i)}{(1-4i) - (-2-2i)}$
d) $\frac{(4-2i) + (-1-i)}{(5+2i) - (2+i)}$ **e)** $\frac{2_{30^\circ} + 2_{150^\circ}}{\sqrt{2}_{315^\circ}}$ **f)** $\frac{(1+i)^3}{(1-i)^2}$
- Realiza las siguientes potencias de números complejos:
a) $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right)^3$ **b)** $(-2, 2\sqrt{3})^6$ **c)** $\left[(3\sqrt{2})_{225^\circ}\right]^4$
d) $(\sqrt{2}_{3\pi/4})^6$ **e)** $(1+i)^{20}$ **f)** $(2_{40^\circ})^3$
- Halla todas las raíces de los siguientes números complejos:
a) $\sqrt[4]{1+i}$ **b)** $\sqrt[3]{-27}$ **c)** $\sqrt[6]{729i}$
d) $\sqrt[3]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$ **e)** $\sqrt[4]{16(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ)}$
- Resuelve las siguientes ecuaciones en el conjunto de los números complejos:
a) $z^4 + 16 = 0$ **b)** $z^4 - 2z^3 + 2z^2 = 0$ **c)** $z^6 - 64z^3 = 0$
d) $z^4 + z^2 - 2 = 0$ **e)** $z^6 - 28z^3 + 27 = 0$
- Halla la suma de las raíces cúbicas de -8 .

- 10.** Expresa, en forma polar y binómica, un número complejo cuyo cubo sea $8\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$.
- 11.** Expresa en forma polar el número $z = (1 - \cos 2x) + i \sin 2x$.
- 12.** Determina x para que el producto $(2-5i)(3+xi)$ sea:
a) un número real **b)** un número imaginario puro
- 13.** Determina un número complejo cuyo cuadrado sea igual a su conjugado.
- 14.** Encuentra un número complejo tal que sumado con $\frac{1}{2}$ dé otro complejo de módulo $\sqrt{3}$ y argumento 60° .
- 15.** Halla el valor de a para que el módulo del cociente $\frac{a+2i}{1-i}$ sea 2.
- 16.** El complejo de argumento 80° y módulo 12 es el producto de dos complejos. Si uno de ellos tiene de módulo 3 y argumento 50° , escribe en forma binómica el otro complejo.
- 17.** Los afijos de los números complejos z_1, z_2, z_3 son los vértices de un triángulo equilátero cuyo incentro es el origen de coordenadas. Sabiendo que $z_1=1+i$, calcula z_2 y z_3 .
- 18.** Si $\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{5}$ y α es un ángulo del primer cuadrante, calcula $\operatorname{sen} 4\alpha$.

5. Vectores.

- Estudia si los vectores $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ forman una base de los vectores libres del plano:
 a) $\begin{cases} \vec{u} = 3\vec{i} - 5\vec{j} \\ \vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \vec{u} = (4, -2) \\ \vec{v} = (-2, 1) \end{cases}$
- a) Demuestra que los vectores $\vec{u} = (2, 1)$ y $\vec{v} = (-3, 2)$ forman una base de los vectores libres del plano.
 b) Calcula las coordenadas del vector $\vec{w} = (2, 8)$ respecto de la base formada por $\{\vec{u}, \vec{v}\}$.
- Estudia si los vectores $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{v} = \vec{i} + 3\vec{j}$ forman una base de los vectores libres del plano. Si $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ es base, halla las coordenadas del vector $\vec{w} = \vec{i} + 10\vec{j}$ en la base B .
- Si $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ son dos vectores tales que $|\vec{u}_1| = |\vec{u}_2|$ y $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$, demuestra que los vectores $\vec{u} = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2$ y $\vec{v} = -y\vec{u}_1 + x\vec{u}_2$ son ortogonales.
- Sea $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ una base tal que $|\vec{u}_1| = 2$, $|\vec{u}_2| = 3$ y $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 4$. Halla el valor de α para que los vectores $\vec{u} = 11\vec{u}_1 + \alpha\vec{u}_2$ y $\vec{v} = \vec{u}_1 + 2\vec{u}_2$ sean ortogonales.
- Sea $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ una base tal que $|\vec{u}_1| = 2$, $|\vec{u}_2| = 5$ y $(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \frac{\pi}{3}$. Calcula los siguientes productos escalares:
 a) $(3\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2) \cdot (\vec{u}_1 + \vec{u}_2)$ b) $(2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2) \cdot (-5\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2)$
- Calcula el valor de α para que los vectores $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} + \alpha\vec{j}$ y $\vec{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \alpha\vec{j}$ sean unitarios.
- Dados los vectores $\vec{u} = -5\vec{i} + 12\vec{j}$ y $\vec{v} = 8\vec{i} - 6\vec{j}$, calcula $\cos(\vec{u}, \vec{v})$.
- Halla el ángulo que forman los vectores $\vec{u} = \vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}$ y $\vec{v} = \sqrt{3}\vec{i} + \vec{j}$.
- Halla el valor de α para que los vectores $\vec{u} = \vec{i} + \sqrt{2}\vec{j}$ y $\vec{v} = \alpha\vec{i} + \sqrt{2}\vec{j}$ formen un ángulo de 30° .
- Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores tales que $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{3}$, $|\vec{a}| = 6$ y $|\vec{b}| = 2$. Calcula:
 a) $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$ b) $\vec{a} \cdot \left(5\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}\right)$
- Sea $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ una base de los vectores libres del plano tal que $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 3$ y $\cos(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 0$. Calcula $\vec{a} \cdot \vec{b}$ siendo $\vec{a} = 3\vec{e}_1 - 7\vec{e}_2$ y $\vec{b} = 8\vec{e}_1 + 13\vec{e}_2$.
- Dados los vectores $\vec{a} = (1, 3)$ y $\vec{b} = (2 - m, 4)$, halla el valor de m para que:
 a) $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tengan la misma dirección.
 b) $\vec{a}$ y $\vec{b}$ formen un ángulo de 120° .

14. Halla el valor que debe darse a m para que los vectores $(m, 3)$ y $(2m, -1)$ sean ortogonales.
15. ¿Para qué valores de a es unitario el vector $(\sin a, 1 - \cos a)$?
16. ¿Qué ángulo forman los vectores $\vec{x} = (3, 4)$ e $\vec{y} = (12, 5)$?

6. Geometría analítica plana.

1. Halla la distancia entre los puntos:
a) $A=(3, -7)$ y $B=(5, 6)$ **b)** $E=(3, 8)$ y $P=(4, -1)$
2. Halla, de todas las formas posibles, la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(-1, 1)$ y tiene como vector director $\vec{u}=(2, 1)$.
3. Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(2, 1)$ y $B(0, 3)$.
4. Dada la recta r de ecuación general $2x-3y+1=0$, halla:
a) Un punto de r , un vector director de r y su pendiente.
b) Las ecuaciones paramétricas de r .
c) La ecuación continua de r .
5. Dada la recta r de ecuación $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3}$, halla:
a) Un punto, el vector director y la pendiente de r . **b)** La ecuación general de r .
6. Dada la recta r de ecuación general $3x-y+3=0$, halla:
a) Los puntos en los que r corta a los ejes de coordenadas. **b)** La ecuación de r en forma segmentaria.
7. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, 2)$ y por el punto de intersección de las rectas $2x-3y+2=0$ y $-x+y-1=0$. ¿Cuál es su pendiente? ¿Cuál es la ordenada en el origen?
8. Halla el valor de a para que las rectas $ax+y-1=0$ y $2x-3y-4=0$ sean paralelas.
9. Dada la recta r de ecuación $y=2x+5$ y el punto $P(2, 1)$, halla la ecuación de una recta s que pase por el punto P y sea paralela a r .
10. En un paralelogramo $ABCD$, se sabe que $A(1, 1)$, $B(0, 3)$ y $C(2, 4)$. Halla:
a) Las ecuaciones de las rectas AB y BC .
b) Las ecuaciones de las rectas AD y CD .
c) Las coordenadas del punto D .
11. Determina el valor de a para que las rectas $ax+(a-1)y-2(a+2)=0$ y $3ax-(3a+1)y-(5a+4)=0$ sean:
a) Paralelas **b)** Perpendiculares
12. Halla la ecuación de la recta perpendicular a $x-2y-9=0$ que pasa por el punto $P(-1, 3)$.
13. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $x+y+1=0$ y $x-y+1=0$ y es perpendicular a la recta $y=2x$.
14. Halla la ecuación de la recta que tiene la misma ordenada en el origen que la recta $2x-3y+6=0$ y que es perpendicular a la recta $y=2x-1$.
15. Halla la ecuación de la mediatriz del segmento determinado por los puntos $A(1, -2)$ y $B(3, 0)$. ¿Qué ángulo forma la mediatriz con el eje de abscisas?
16. Halla la distancia del punto $P(-1, 1)$ a la recta r que corta a los ejes de abscisas y ordenadas a distancias 3 y 4, respectivamente, del origen de coordenadas.

17. Halla la distancia del origen de coordenadas a la recta que pasa por el punto $P(0, 2)$ y tiene de pendiente -1 .
18. Halla la distancia entre las rectas $x+y+1=0$ y $2x+2y-4=0$.
19. Determina m para que las rectas $mx+y=12$ y $4x-3y=m+1$ sean paralelas, y halla su distancia.
20. Halla el área del triángulo de vértices $A(2, -1)$, $B(-5, 1)$ y $C(0, 3)$.
21. Halla el ángulo que forman las rectas $x-2y+4=0$ y $3x-y=1$.
22. Halla el valor de k para que las rectas $x+y=0$ y $x+ky-1=0$ formen un ángulo de 60° .
23. Las rectas $3x-4y+1=0$ y $mx+8y-12=0$ son paralelas. Calcula m y la distancia entre ellas.
24. Calcula la distancia del baricentro del triángulo de vértices $A(5, 1)$, $B(1, 7)$ y $C(-1, 3)$ a cada uno de los lados.
25. El punto $P(5, 2)$, ¿cuánto dista de la recta determinada por los puntos $A(1, -3)$ y $B(-2, 1)$?
26. Halla la recta que pasa por el origen de coordenadas y forma con la recta $2x-y+2=0$ un ángulo de 45° .
27. Determina la ecuación de las bisectrices de los ángulos determinados por las rectas $x+y=0$ y $2x-3y=1$.
28. Una recta r pasa por $(2, 5)$ y corta a los ejes de coordenadas según segmentos iguales. Halla su ecuación.
29. Determina sobre la recta $3x-5y+25=0$ un punto que diste lo mismo de $A(3, 4)$ que de $B(7, 8)$.
30. Las rectas $3x+2y-1=0$ y $x+ky-2=0$ forman un ángulo de $\pi/3$. Halla k .
31. El vértice A de un rombo está en el eje de abscisas. Dos vértices opuestos son $B(3, 5)$ y $D(2, 1)$. Calcula las coordenadas de A y C y el perímetro y el área del rombo.
32. Una recta de ecuación $x+2y=9$ es mediatriz de un segmento AB cuyo extremo A tiene por coordenadas $(2, 1)$. Halla las coordenadas de B .
33. La recta $x+2y-4=0$ corta al eje OY en A y a la bisectriz del segundo cuadrante en B . Halla la ecuación de la mediatriz AB .
34. Por el punto $P(1, 2)$ traza una perpendicular a la recta $x-2y+1=0$ y encuentra el punto de esa perpendicular que equidiste de P y de la recta.
35. Determina el valor que debe tener p para que la recta $(3+p)x-5y+2=0$ sea perpendicular a la que corta a los ejes OX y OY en los puntos $(-3, 0)$ y $(0, 2)$ respectivamente.
36. Dada la recta de ecuación $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, halla a y b con la condición de que la recta pase por el punto $(3/2, 2)$ y determine con los ejes de coordenadas un triángulo de área igual a 12 u^2 .
37. Dados los puntos $A(0, 3)$, $B(6, 6)$ y $C(6, 2)$, representa el triángulo que determinan, halla su área y el circuncentro.
38. La recta $y+2=m(x+3)$ pasa por el punto de intersección de las rectas $2x+3y+5=0$ y $5x-2y-16=0$. Calcula m .
39. Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los puntos $A(2, 5)$ y $B(4, -7)$. ¿Qué se obtiene?
40. Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de las rectas $3x-4y+5=0$ y $6x+8y+1=0$. ¿Qué se obtiene?

7. Cónicas.

1. Halla la ecuación de cada una de las siguientes circunferencias:
 - a) Centro $C(3, -2)$ y radio $r=3$.
 - b) Centro $C(1, 2)$ y pasa por el punto $P(-1, -2)$.
 - c) Centro $C(3, 2)$ y tangente a la recta $3x+4y+3=0$.
 - d) Pasa por los puntos $A(1, 0)$, $B(3, -2)$ y $C(1, -4)$.
 - e) Tiene su centro en la recta $x+y-2=0$ y pasa por los puntos $A(4, -1)$, $B(-1, -2)$.
 - f) Su radio es 5, pasa por el punto $A(3, 5)$ y su centro está en la recta $3x-y+1=0$.
2. Halla el centro C y el radio r de las siguientes circunferencias:
 - a) $x^2+y^2-8x-2y-4=0$
 - b) $4x^2+4y^2-4x+12y+6=0$
3. Halla el valor de k para que la recta $x-y=k$ sea tangente a la circunferencia $x^2+y^2-2y-1=0$. Halla las coordenadas del punto de tangencia.
4. Halla la ecuación de la tangente y la normal a la circunferencia C en el punto P , en cada uno de estos casos:
 - a) $C: x^2+y^2-4x+6y-3=0$; $P(2, 1)$
 - b) $C: x^2+y^2-3x+4y-9=0$; $P(-1, 1)$
5. Calcula la potencia de los puntos $P(1, -2)$ y $Q(8, 0)$ respecto de la circunferencia de ecuación $x^2+y^2-2x+3y-18=0$. ¿Qué posición ocupan esos puntos respecto de la circunferencia?
6. Halla el eje radical de las circunferencias C_1 y C_2 , sabiendo que el radio de C_1 es 2, el radio de C_2 es 3, el centro de C_1 es $(0, 1)$ y el centro de C_2 es $(1, -1)$.
7. Halla la ecuación de cada una de las siguientes elipses:
 - a) $a=5$ y $c=3$.
 - b) Eje mayor 16 y $e=1/4$.
 - c) El vértice A tiene de coordenadas $(8, 0)$ y el punto $P(3, 2)$ pertenece a la elipse.
 - d) El punto $P(3, 2)$ pertenece a la elipse, y $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
8. Halla la excentricidad de una elipse que pasa por los puntos $A(0, 2)$ y $B(3, 1)$.
9. Estudia la posición relativa de la elipse $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} = 1$ y la recta $x-y+3=0$.
10. Halla la ecuación de cada una de las siguientes hipérbolas:
 - a) Eje mayor 8 y $e=5/4$.
 - b) Eje menor 18 y distancia focal 30.
 - c) Pasa por los puntos $P(2, 0)$ y $Q(4, 3)$.
 - d) Pasa por el punto $P(\sqrt{2}, 2)$ y $e=\sqrt{5}$.
11. Halla las asíntotas de la hipérbola $9x^2 - 4y^2 = 36$.
12. Halla la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto $P(2, 1)$ y tiene por asíntota la recta $y=3x$.

- 13.** Halla la ecuación de una hipérbola sabiendo que uno de sus focos es $F(5, 0)$ y que la ecuación de una de sus asíntotas es $3x-4y=0$.
- 14.** Halla el ángulo que forman las asíntotas de la hipérbola cuya ecuación es $3x^2-y^2=9$.
- 15.** Sea $x \cdot y=18$ la ecuación de una hipérbola equilátera, referida a sus asíntotas. Halla las coordenadas de los focos, vértices y la ecuación de la hipérbola referida a sus ejes.
- 16.** Halla la ecuación de cada una de las siguientes parábolas:
- a)** Su foco es $F(5, 0)$ y su directriz $x+5=0$.
 - b)** Su foco es $F(0, 3)$ y su directriz $y+4=0$.
 - c)** Su foco es $F(4, 0)$ y su vértice $V(1, 0)$.
 - d)** Su vértice es el punto $V(0, 0)$ y pasa por el punto $P(3, 3)$.
- 17.** Halla las ecuaciones reducidas de las siguientes parábolas:
- a)** $y^2-2x-2y+3=0$
 - b)** $y^2-4x+4y+12=0$
- 18.** Identifica las siguientes cónicas:
- a)** $3x^2+4y^2+6x-9=0$
 - b)** $x^2+y^2-2x+4y+4=0$
 - c)** $y^2-3x-2y+7=0$
 - d)** $x^2-7y^2-28y-35=0$
 - e)** $x^2+5y^2-4x+10y+4=0$
 - f)** $x^2+4x-2y+2=0$
 - g)** $3x^2-2y^2+18x-4y+19=0$
 - h)** $x^2+y^2-2y-3=0$

8. Funciones y sucesiones.

1. a) Halla la ordenada del punto de abscisa -2 en la gráfica de la función $f(x)=x^3-2(x-3)$.
 b) ¿Para qué valor la imagen por la función $f(x)=-2x^2+x+2$ es -19 ?
 c) ¿Pertenece el punto $(-2, 1)$ a la gráfica de la función $y=-x^6-4$?

2. Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x)=x^4-2x^2+1$	b) $f(x)=\frac{6x^2-2}{4x+1}$	c) $f(x)=\sqrt{25-2x^2}$
d) $y=\sqrt{\frac{x+5}{x^2-1}}$	e) $y=\frac{\sqrt{x^2-3x-10}}{x-1}$	f) $y=\frac{x^2-9}{\sqrt{x-2}}$
g) $y=\sin(x+4)$	h) $y=\cos\frac{x+1}{x-2}$	i) $y=6^{x+5}$
j) $y=5^{\frac{x}{3x-9}}$	k) $y=\log(3x-8)$	l) $y=\log_3\frac{x^2-1}{x+4}$

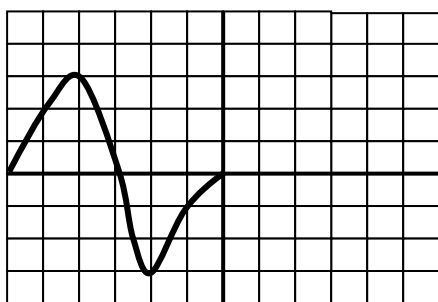
3. Representa gráficamente las siguientes funciones e indica su dominio y recorrido:

a) $f(x)= x $	b) $f(x)=\text{Ent}(x)$	c) $f(x)=\text{Dec}(x)$
d) $f(x)=\begin{cases} -3 & \text{si } x < -2 \\ 2x+2 & \text{si } -2 < x < 1 \\ -x+2 & \text{si } 1 \leq x < 4 \end{cases}$	e) $f(x)=\begin{cases} 3 & \text{si } x < -3 \\ x+5 & \text{si } -3 < x \leq 2 \\ -x-1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$	f) $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

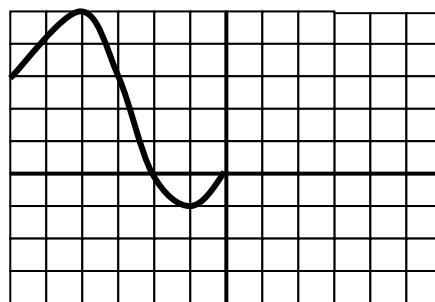
4. Estudia la simetría de las siguientes funciones:

a) $f(x)=7x^4+2x^2-3$	b) $g(x)=\frac{-3x^3}{x+2x^5}$	c) $h(x)=\frac{x^2+2}{x^3-1}$
d) $j(x)=\frac{5x^4-2x^2}{x^3-8x}$	e) $k(x)=\frac{4x^4-6}{-x^2+7}$	f) $l(x)=\frac{5x^3-1}{4x^5+2x}$

5. Completa las gráficas siguientes para que correspondan al tipo de función que se señala:

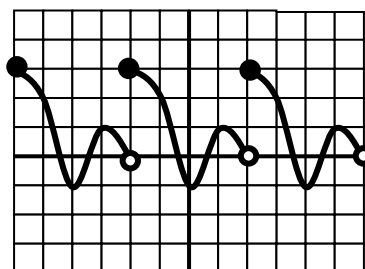
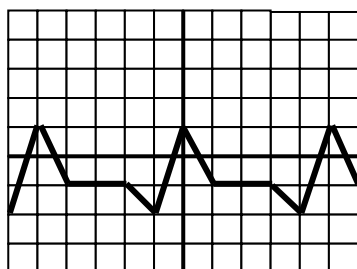


par

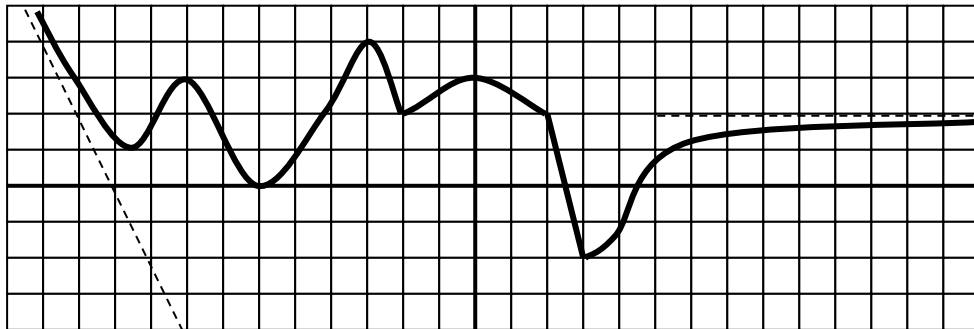


impar

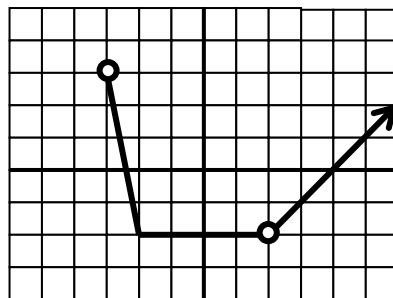
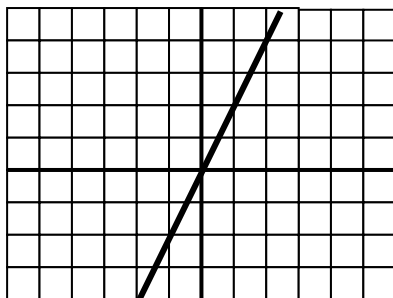
6. Señala el periodo de las siguientes funciones:



7. Observa la siguiente función y responde a las cuestiones que se plantean:



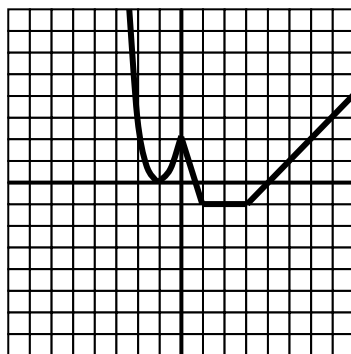
- ¿Cuáles son los intervalos de crecimiento y decrecimiento?
 - ¿Hay máximos o mínimos relativos? ¿Cuáles?
 - ¿Está la función acotada superiormente? En caso afirmativo, indica el supremo y el máximo (si existe).
 - ¿Está la función acotada inferiormente? En caso afirmativo, indica el ínfimo y el mínimo (si existe).
 - ¿Es una función acotada?
 - ¿Tiene alguna asíntota? ¿Cuál?
8. Dibuja la gráfica que indica el costo de una carrera de taxi de 2 km, sabiendo que cada 300 m cuesta 50 céntimos y la bajada de bandera inicial 1 €.
9. El coste de la energía eléctrica se obtiene mediante un sumando fijo y otro proporcional a la cantidad de energía gastada. En dos meses distintos se ha pagado 35,70 € por 340 kWh y 31,14 € por 283 kWh. ¿Cuál es el sumando fijo?
10. Dadas las funciones $f(x) = \frac{3x-5}{x^2-4}$, $g(x) = \frac{x+4}{2x+4}$ y $h(x) = \frac{5-2x}{4}$, halla:
- $f(x)+g(x)-h(x)$
 - $f(x) \cdot h(x)$
 - $3f(x)-g(x)h(x)$
 - $\frac{f(x)}{g(x)}$
 - $(f \circ h)(x)$
 - $(h \circ f)(x)$
 - $(g \circ f \circ h)(x)$
11. Sean las funciones $f(x) = \sqrt{\frac{2x-5}{x+2}}$ y $g(x) = \frac{x+1}{x-3}$. Halla $g^{-1}, f^{-1}, g \circ f^{-1}, f \circ g^{-1}, f^{-1} \circ g, (f \circ g)^{-1}$.
12. Siendo $f(x)=5-x$ y $g(x)=3x-a$, calcula el valor de a para que la composición de ambas sea conmutativa.
13. Halla las funciones a las que corresponden las siguientes gráficas:



14. Representa gráficamente las siguientes funciones y estudia el dominio, el recorrido, la continuidad, la monotonía, los extremos relativos, la curvatura y las asíntotas:

a) $y = -\frac{1}{3}x$ b) $y = 5x + 2$ c) $y = 2x^2 - x + 2$ d) $y = 4$ e) $y = -\frac{2}{x}$

15. Conocida la gráfica de la función $f(x)$, representa las funciones $f(-x)$, $-f(x)$, $|f(x)|$, $f(|x|)$, $f^{-1}(x)$, $f(x-2)+1$, $f(x/2)$, $f(x)/2$:



16. Representa gráficamente las siguientes funciones y estudia el dominio, el recorrido, la continuidad, la monotonía, los extremos relativos, la curvatura y las asíntotas:

a) $f(x) = |-3|$ b) $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$ c) $f(x) = |4x + 1|$ d) $f(x) = \left| \frac{3}{x} \right|$
e) $f(x) = -5|x|$ f) $f(x) = 2|x| - 3$ g) $f(x) = \frac{4}{|x|}$ h) $f(x) = |x|^2 - 6|x| + 8$

17. Representa gráficamente las siguientes funciones y estudia el dominio, el recorrido, la continuidad, la monotonía, los extremos relativos, la curvatura y las asíntotas:

a) $f(x) = -\frac{2}{x} + 5$ b) $f(x) = \frac{3}{x-4}$ c) $f(x) = \frac{3x+1}{x+1}$ d) $f(x) = \left| \frac{5-2x}{x-2} \right|$ e) $f(x) = \frac{|x|+2}{|x|-1}$

18. Representa gráficamente las siguientes funciones y estudia el dominio, el recorrido, la continuidad, la monotonía, los extremos relativos, la curvatura y las asíntotas:

a) $y = 3^{x+2}$ b) $y = \left(\frac{1}{4} \right)^x - 3$ c) $y = 2 + \log_5 x$ d) $y = \log_{\frac{1}{6}}(x-3)$
e) $y = -3^x$ f) $y = \left(\frac{1}{4} \right)^{|x|}$ g) $y = |\log_5 x|$ h) $y = 2 \log_{\frac{1}{6}} x$

19. Representa gráficamente las siguientes funciones y estudia el dominio, el recorrido, la continuidad, la periodicidad, la monotonía, los extremos relativos, la curvatura y las asíntotas:

a) $y = \sin(x + 30^\circ)$ b) $y = \cos x - 2$ c) $y = 2 \sin x$ d) $y = \cos\left(\frac{x}{3}\right)$
e) $y = -\tan x$ f) $y = |\tan x|$ g) $y = 2\pi + \arccos x$ h) $y = \arcsin 2x$

20. Representa gráficamente la función $|f(x)|$ donde

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } 1 \leq x < 4 \\ x - 3 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0 \\ 1 - x^2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ \log_2 x - 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

21. a) Representa gráficamente la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x + 9 & \text{si } x < -2 \\ -3 & \text{si } -2 < x < 1 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

b) Indica su dominio y recorrido.

c) Estudia su monotonía y extremos relativos.

d) ¿Tiene asíntotas? En caso afirmativo, indica cuáles son.

22. El número de ejemplares que se venden de una determinada novela, en función del número de años transcurridos desde el de su publicación, viene dado por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} 3^{x+1} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ -x^2 + 2x + 8 & \text{si } 1 \leq x < 4 \end{cases} \quad (\text{miles de ejemplares}).$$

a) Representa gráficamente la función.

b) Interpreta con palabras dicha gráfica.

9. Límites y continuidad.

1. Calcula los siguientes límites:

$$11. \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{n+1} - \frac{3}{n+2} \right)$$

$$14. \lim_{n \rightarrow +\infty} (-n^2 + 3n - 1)$$

$$17. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 2}{3n - n^2}$$

$$20. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n^2 - 5}{\frac{6}{n} - 5}$$

$$23. \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{9n-2}{3n-6}}$$

$$26. \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^4 + 7} - n^2)$$

$$29. \lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + 3x - 7)$$

$$32. \lim_{x \rightarrow -\infty} (8x^5 - 3x^2 + 9)$$

$$35. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x - 1}$$

$$38. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2}$$

$$41. \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3n-7}{3n+3} \right)^{5n-2}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2+x)^3 - 8}{x}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x^2 + 6x}{x^3 - 2}$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x}$$

$$21. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - 6} - x + 2)$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 18}{\sqrt{x+1} - 2}$$

$$27. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^3 + 6x - 5}{-4x + 2}$$

$$30. \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-5}{2x+3}$$

$$33. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 + 3}{(x-5)^2}$$

$$36. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 5} - \sqrt{x^2 + 6x}}{5x + 2}$$

$$39. \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x+5} + x)$$

$$42. \lim_{x \rightarrow 2} (3-x)^{\frac{1}{2x-4}}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3} - x}{x^2 - 5x + 6}$$

$$16. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x^2 + 3x + 6}{\sqrt{2x^2 - 5x}}$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^5 - 8x^3}{3x^2}$$

$$22. \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 3} + 2x - 5)$$

$$25. \lim_{x \rightarrow -4} \frac{5-x}{x^2 + 3x - 4}$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4 - \sqrt{6x+10}}{2 - \sqrt{x+3}}$$

$$31. \lim_{x \rightarrow 3} (2x+5)^{x-3}$$

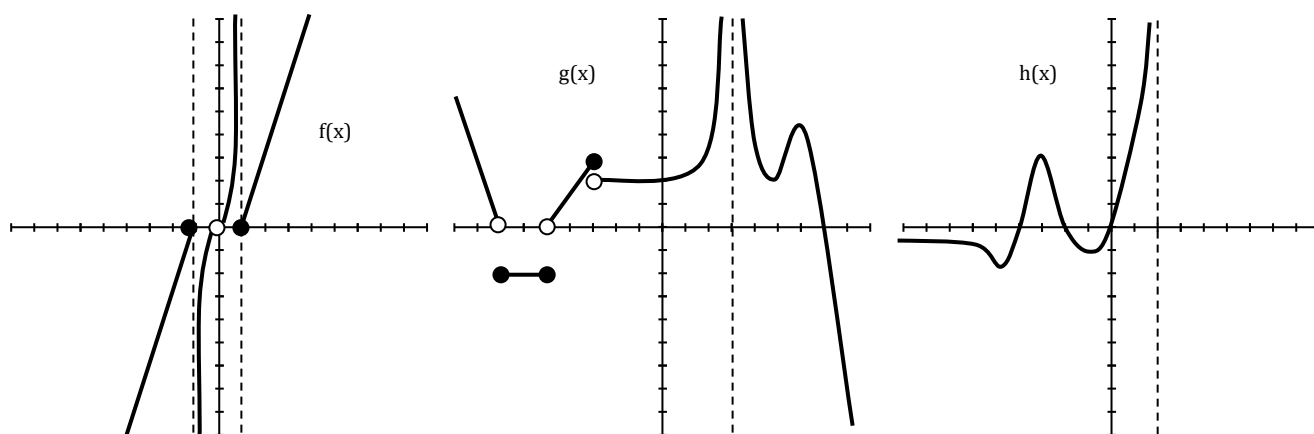
$$34. \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x+2}{x^2 + 4x + 4} \right)^{\frac{2}{x}}$$

$$37. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{6x^2 + 2} + \sqrt{x-3})$$

$$40. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x-2} - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^3 + 2} + x^2}$$

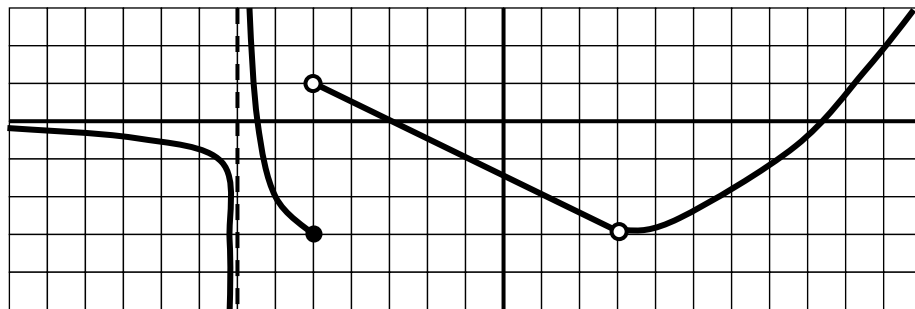
$$43. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{\frac{2x^2}{x+2}}$$

2. Observa las gráficas y calcula los límites que se indican:



- a)** $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ **b)** $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ **c)** $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ **d)** $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ **e)** $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$
f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ **g)** $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ **h)** $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ **i)** $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$ **j)** $\lim_{x \rightarrow -7} g(x)$
k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ **l)** $\lim_{x \rightarrow 5} g(x)$ **m)** $\lim_{x \rightarrow -5} g(x)$ **n)** $\lim_{x \rightarrow -3} g(x)$ **p)** $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$
q) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ **r)** $\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x)$ **s)** $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$ **t)** $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ **u)** $\lim_{x \rightarrow -3} h(x)$

3. ¿Son continuas las funciones del ejercicio anterior? Si no es así, indica en qué puntos son discontinuas y qué tipo de discontinuidad se presenta.
4. Observa la siguiente función:



Halla:

- a)** $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ **b)** $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ **c)** $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ **d)** $\lim_{x \rightarrow -5} f(x)$ **e)** $\lim_{x \rightarrow -7} f(x)$

Estudia la continuidad de la función.

5. Estudia la continuidad de $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$ en los puntos $x = 0$ y $x = 1$.

6. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

- a)** $f(x) = \frac{3x+5}{x^2-4}$ **b)** $f(x) = \frac{2x-12}{x^2-12x+36}$ **c)** $f(x) = \frac{7}{(x+3)^2}$ **d)** $f(x) = \frac{2x+4}{2x^2+3x-2}$
e) $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x+1 & \text{si } 2 < x < 4 \\ 9 & \text{si } x > 4 \end{cases}$ **f)** $f(x) = \begin{cases} \frac{x-3}{x} & \text{si } x \in (-\infty, 2] \\ 5 & \text{si } x \in (2, 6) \end{cases}$ **g)** $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{2x} & \text{si } x < -1 \\ 4x+4 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

7. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ 2 & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$.

8. Halla el valor de k para que sea continua la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-27}{x^2-9} & \text{si } x \neq 3 \\ k & \text{si } x = 3 \end{cases}$.

9. Estudia la continuidad de las funciones:

- a)** $f(x) = |x|$ **b)** $f(x) = |4x-12|$ **c)** $f(x) = |x^2-6x+8|$

10. Dibuja la gráfica de una función $f(x)$ tal que $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 2$ y que todos los valores de la función sean mayores que 2.

11. Halla las asíntotas de las siguientes funciones:

- a)** $y = -x^4 + 5x^2 + 4$ **b)** $y = \frac{5x+6}{2x^2-8}$ **c)** $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

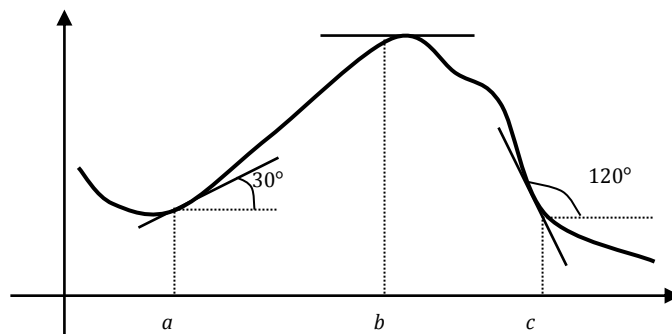
$$\text{d)} \quad y = \frac{8}{x^2 + 9}$$

$$\text{e)} \quad y = \frac{3x^2 + 2x}{6 + x}$$

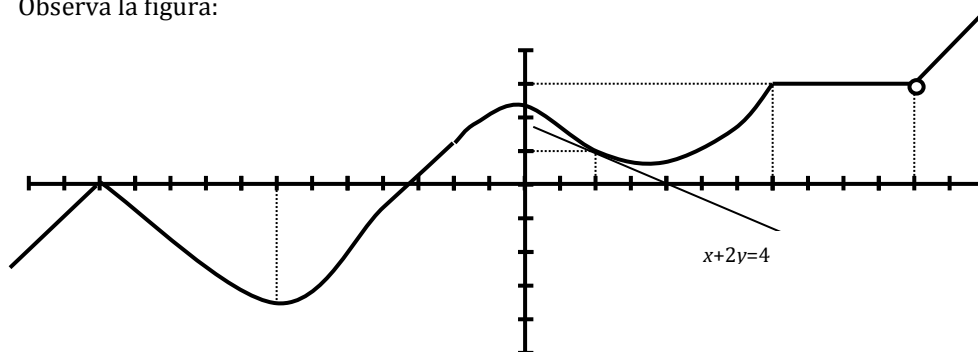
$$\text{f)} \quad y = -\frac{6x^3 - 5}{2x^2 + 5}$$

10. Derivadas.

- Sea la función $f(x)=3x^2-4x+2$.
 - Halla la tasa de variación en el intervalo $[-4, -1]$.
 - Halla la tasa de variación media en el intervalo $[2, 2+h]$.
 - Halla la tasa de variación instantánea en $x=2$.
- Halla la tasa de variación media de la función $f(x)=5x^4-2x^2$ en el intervalo $[-3, 2]$.
 - Halla la tasa de variación instantánea de la función $f(x)=x^3-x^2$ en el punto $x=-2$.
- Mediante la definición (o regla general de derivación) halla la función derivada de la función $f(x)=5x^2+3x-4$.
- Mediante la definición (o regla general de derivación) halla la función derivada de la función $f(x)=2x^3-3x^2+1$ y calcula la derivada en el punto de abscisa $x=3$.
- Halla la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)=6x^2-5$ en el punto de abscisa $x=1$.
- Determina las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $f(x)=x^2+4x+2$ en el punto de abscisa $x=-2$.
- ¿Cuánto valen $f'(a)$, $f'(b)$ y $f'(c)$ a la vista del dibujo siguiente?



- Observa la figura:



¿Cuánto valen $f'(2)$, $f'(-7)$ y $f'(0)$? ¿En qué puntos la función no es derivable?

- Halla las derivadas de las siguientes funciones:

1. $y = \frac{\pi}{5}$

2. $y = x^8$

3. $y = \log_6 x$

4. $y = \sin x^5$

5. $y = \cos^3 x$

6. $y = \log(\cos x)$

7. $y = x - \operatorname{sen}^4 x + \cos x^4$
 10. $y = (5x + \operatorname{sen} x) \ln x^3$
 13. $y = \frac{4}{(\log 8x)^6}$
 16. $y = \operatorname{tg}(6x + 1)^2$
 19. $y = \operatorname{cosec} \sqrt{8x}$
 22. $y = (\operatorname{tg} 7x)^{x^3 + x^2 - 6x}$
 25. $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 9x^4$
 28. $y = \operatorname{arccotg} \sqrt{\ln x}$
 31. $y = e - \frac{1}{5} x^3 \sqrt{x^2} + \frac{3}{x^2 \sqrt{x}}$
 34. $y = \sqrt[3]{\frac{6x^2 - 1}{8x + 2}}$
 37. $y = \log_3 (\operatorname{sen} x^2) + 2$
 40. $y = (5x^3 - 8x + \cos x)^{\operatorname{tg} 6x}$
 43. $y = 5 \log x + \log 5x$
 46. $y = \frac{3}{2} x^3 + x^2 + \frac{x}{3} - \frac{5}{x} - \frac{1}{x^3} + 1$
 49. $y = \frac{x + e^x}{x - e^x}$
 52. $y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$
 55. $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$
 8. $y = 3 \ln x$
 11. $y = \frac{\cos 4x}{3x^2 + 5x - 2}$
 14. $y = \sqrt{5x^2 + 7x - 3}$
 17. $y = \operatorname{cotg}(\ln 7x^4)$
 20. $y = 3^{\operatorname{sen} 5x^3}$
 23. $y = \operatorname{arc} \operatorname{sen}(4x + 5)$
 26. $y = \operatorname{arc} \operatorname{sec} \frac{3x - 6}{x^5}$
 29. $y = \frac{4x^6 - \operatorname{sen} x}{8}$
 32. $y = \frac{4x^6 + 6x^4}{5x^2 - x + 8}$
 35. $y = \frac{4x - 9}{(5x^2 - 3)^4}$
 38. $y = 5^x \cdot x^5$
 41. $y = \cos^4(x \cos x^4)$
 44. $y = \operatorname{sen} x \cdot \ln 6x$
 47. $y = (7x - 2 \ln 4x)^5$
 50. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$
 53. $y = \operatorname{arcsen}(\sqrt{x + 1})$
 56. $y = \ln \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$
 9. $y = 6x^5 - x^3 + x - 2$
 12. $y = (8x^4 - 3x^2 - x)^{-3}$
 15. $y = \sqrt[5]{\operatorname{sen}^4 2x^3}$
 18. $y = \operatorname{sec} \frac{5x}{x^3 - 5x}$
 21. $y = e^{9x^5 - 2x^3 + 5}$
 24. $y = \operatorname{arc} \cos 3x^8$
 27. $y = \operatorname{arccosec}(\log x)$
 30. $y = \frac{2}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^2 + x$
 33. $y = (x^3 - 3x^2 - 7x)^8$
 36. $y = \log_3 (\operatorname{sen} x^2 + 2)$
 39. $y = \operatorname{sen}(x^3 - e^{5x-3})$
 42. $y = \frac{9}{\sqrt{5x^4 + 2}}$
 45. $y = \operatorname{sen}(x \cdot \ln 6x)$
 48. $y = x \cdot \operatorname{tg}^3 4x$
 51. $y = \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$
 54. $y = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$
 57. $y = \operatorname{sen}^2(\operatorname{sen}^2 x^2)$
10. Halla $f'''(x)$ si $f(x) = \operatorname{sen}(5x^2 + 4x)$.
 11. Halla la ecuación de las rectas tangente y normal a la curva $y = \sqrt{2x + 1}$ en el punto de abscisa $x = 4$.
 12. ¿En qué punto la recta tangente a la curva $f(x) = x^2 - 3$ es paralela a la bisectriz del primer cuadrante?

11. Aplicaciones de las derivadas.

1. Estudia el crecimiento de las siguientes funciones en los puntos que se indican:
a) $y = 5x^3 + 2$ en $x = 3$ **b)** $y = \cos 2x$ en $x = \pi/6$
2. Estudia el crecimiento y los extremos de las siguientes funciones:
a) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ **b)** $y = x^4 - x^3$ **c)** $y = \frac{2}{x-1}$
3. Estudia la curvatura de las siguientes funciones en los puntos que se señalan:
a) $y = x^3 - 4x^2 + 1$ en $x = -2$ **b)** $y = 3 \cdot \sin x$ en $x = \pi/4$
4. Estudia la curvatura y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:
a) $y = 3x^5 - 5x^4 - 4x + 3$ **b)** $y = \frac{x}{x-3}$ **c)** $y = e^x$
5. Estudia el crecimiento, los extremos, la curvatura y los puntos de inflexión de las funciones:
a) $y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$ **b)** $y = \frac{x}{(x+1)^2}$
6. Halla un número tal que el exceso sobre su cuadrado sea máximo.
7. Un rectángulo tiene 16 m^2 de superficie. Calcula sus dimensiones para que su perímetro sea mínimo.
8. Con una cartulina cuadrada de 18 cm de lado, se desea construir una caja, a cuyo fin se corta un pequeño cuadrado en cada esquina, doblando las solapas resultantes. Calcula el lado de cada cuadrado para que la caja tenga el máximo volumen posible.
9. ¿Cuáles son las proporciones más económicas que se pueden dar a una lata cilíndrica de $16\pi \text{ cm}^3$?
10. Una población varía a lo largo del tiempo según la relación $P = -t^2 + 2t + 3$, donde t es el número de años transcurridos y P el número de miles de habitantes.
a) ¿Cuántos habitantes hay inicialmente?
b) ¿En qué momento el número de habitantes es máximo?
c) ¿Cuál es el número máximo de habitantes que alcanza la población?
d) ¿Cuál es el mínimo número de habitantes que tendrá la población y cuándo se obtendrá?
11. Indica el dominio de cada una de las siguientes funciones:
a) $y = \cos\left(\frac{x+6}{2x-3}\right)$ **b)** $y = 8^{\sqrt{x^2-1}}$ **c)** $y = \ln\left(\frac{1-x}{x^2+5}\right)$
12. Estudia las simetrías de las siguientes funciones:
a) $y = -\frac{4x^2+8}{x^3-4x}$ **b)** $y = |x|$ **c)** $y = |5x+15|$
13. Halla los puntos de corte con los ejes de la gráfica de la función $y = 2x^3 + 5x^2 - 3x$.

14. Estudia y representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 2$

b) $y = \frac{6}{(x+1)^2}$

c) $y = \frac{x-1}{x-2}$

d) $y = \frac{x^2}{2x^2 - 8}$

e) $y = x^4 - 2x^2 - 3$

f) $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

g) $y = \frac{2x^2}{x+1}$

h) $y = |x^2 - 4x + 3|$

i) $y = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \leq 4 \\ x+2 & \text{si } x > 4 \end{cases}$

12. Integrales.

1. Calcula las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int \frac{2x}{7x^2+3} dx$

b) $\int \cos^3 4x \cdot \sin 4x dx$

c) $\int \frac{1}{x \cdot \ln x} dx$

d) $\int \left[\frac{3}{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + \frac{5}{x} - 7 \right] dx$

e) $\int \frac{dx}{x \cdot \ln^3 x}$

f) $\int 5x \sqrt{x^2+1} dx$

g) $\int \frac{3^x}{\sqrt{1-3^x}} dx$

h) $\int x \sqrt[3]{8-x^2} dx$

i) $\int \frac{4x^2-8}{x^3-6x} dx$

j) $\int \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x} dx$

k) $\int e^{\cos x} \cdot \sin x dx$

l) $\int \frac{-5x}{\sqrt{1-x^4}} dx$

m) $\int 3e^{-x} dx$

n) $\int \frac{x^3 - 2x^2 - x}{\sqrt{x}} dx$

o) $\int \frac{e^x + 1}{e^x + x} dx$

p) $\int \frac{3x+1}{x^2+16} dx$

q) $\int \frac{-3x}{2-6x^2} dx$

r) $\int 3x(x^2+5)^2 dx$

2. Halla tres primitivas de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x)=4x^3-5$

b) $g(x)=2 \sin 2x$

c) $h(x)=e^{2x}$

3. Halla la primitiva de la función $f(x) = \frac{1}{x+1}$ que valga 3 para $x=0$.

4. Encuentra una función $y=f(x)$ cuya derivada sea $f'(x)=3x^2$ y pase por el punto $(2, 10)$.

5. Demuestra que la función $F(x) = 2x^2 \cdot \ln x - x^2 + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ es una primitiva de $f(x)=4x \ln x$.

6. Calcula las siguientes integrales definidas:

a) $\int_0^1 (x^2 + 2x) dx$

b) $\int_1^2 \frac{1}{x+1} dx$

c) $\int_2^5 (x^2 - 1) dx$

d) $\int_2^3 \frac{1}{x^2} dx$

e) $\int_1^2 \sqrt{x} dx$

f) $\int_3^4 (x^3 - x^2 + 3x - 2) dx$

g) $\int_1^2 x e^{x^2} dx$

h) $\int_0^1 e^x dx$

i) $\int_2^4 \frac{x}{x^2+1} dx$

j) $\int_2^6 \sqrt{x-2} dx$

k) $\int_1^3 (x-1)^5 dx$

l) $\int_0^1 e^{3x} dx$

m) $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

n) $\int_0^\pi \sin 2x dx$

o) $\int_0^\pi \cos x dx$

p) $\int_0^8 \sqrt[3]{x} dx$

q) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx$

r) $\int_0^2 x^2 \sqrt{1+x^3} dx$

7. Calcula el área en cada uno de los siguientes casos:

a) Recinto limitado por la gráfica de la función $y=3x$, el eje OX y la recta $x=3$.

b) Recinto limitado por la función $f(x)=-x^2+4$ y el eje de abscisas.

c) Recinto limitado por la gráfica de la función $y = \frac{1}{x}$, el eje OX y las rectas $x=1$ y $x=e$.

- d)** Recinto limitado por la gráfica de la función $y=e^{2x}$, el eje de abscisas, el eje de ordenadas y la recta $x=2$.
- e)** Recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)=\cos x$, el eje OX y las rectas $x=\frac{\pi}{2}$ y $x=2\pi$.
- 8.** Realiza un esbozo de las regiones cuyas áreas vienen determinadas por las integrales que siguen y calcula las correspondientes áreas:
- a)** $\int_1^3 (x^2 - 9) dx$ **b)** $\int_{-1}^2 (-x^2 + x + 2) dx$ **c)** $\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \cos x dx$
- 9.** Calcula el área de los recintos limitados por las curvas en cada uno de los siguientes apartados.
- a)** $y=x^2$; $y=2$ **b)** $y=x^2$; $y=2x$ **c)** $y=-x^2+x$; $y=-x$
- d)** $y=-x^2+2x$; $y=x^2$ **e)** $y=x^2$; $y=8-x^2$ **f)** $y=\sin x$; $y=\cos x$; $x=0$; $x=\pi$
- 10.** Calcula el área limitada por la gráfica de la función $f(x)=x^3-3x$ y el eje OX .
- 11.** Halla el área del recinto limitado por las gráficas de las curvas $f(x)=x^3-3x^2$ y $g(x)=x-3$.
- 12.** Halla una función $f(x)$ de la que sabemos que $f(1)=0$, $f'(1)=0$ y $f''(x)=6x-6$.