

1. Números reales.

1. Efectúa las siguientes operaciones:

$$a) \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - \frac{1}{6} + \frac{7}{6} \left(-\frac{2}{5} + \frac{1}{2}\right) \frac{3}{2} =$$

$$b) -\frac{8}{3} + \frac{1}{3} - \left(\frac{6}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) =$$

$$c) \left(5,32\overline{4} - 3\right)^2 + 10,3 - 6,24 + 1,6\overline{2} =$$

2. Aproxima el número $2,\overline{7}$ hasta las milésimas e indica el error absoluto y el relativo cometidos al aproximar. Da una cota razonable de esos errores.

3. ¿Qué error absoluto se comete si como aproximación de $\frac{14}{3}$ se toma el número 4,67? ¿Qué error relativo? Indica una cota razonable de esos errores.

4. Aproxima $\sqrt{7}$ hasta las diezmilésimas y señala una cota del error absoluto y del relativo.

5. Calcula con tres cifras decimales exactas $\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} + 2\pi + \sqrt{2}$, sabiendo que $\pi = 3,14159\dots$ y que $\sqrt{2} = 1,4142\dots$

6. Realiza las siguientes operaciones con potencias:

$$a) (-3)^{-2} + 5 \cdot 3^2 - (-2)^0 - 2^4 - 2^3 + 3^4 \cdot 3^{-2} - 3^{-3} =$$

$$b) (-3)^3 \cdot 2^{-4} - 2^2 + (-3)^0 - (-2)^4 - (-3)^5 + (-2)^{-3} =$$

7. Simplifica las siguientes expresiones con potencias:

$$a) \frac{2^5 \cdot 15^{-2} \cdot (-3^2)^2}{10^{-4} \cdot 9^2}$$

$$b) \left[\frac{(-2)^0 \cdot 3^5 \cdot 15^{-2}}{3^{-4} \cdot (-8)^3} \right]^3 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)^{-2}$$

$$c) \frac{a^7 \cdot (ab)^{-3}}{(a^2)^2 \cdot b^5 (a^2b)^{-2}}$$

$$d) \left[\frac{-a^2 (b^{-2})^3 (-ab)^{-4}}{a^{-2} (-b)^5 (-a^2)} \right]^5$$

8. Halla todas las raíces posibles de:

$$a) \sqrt[4]{0,0016}$$

$$b) \sqrt[5]{-\frac{243}{32}}$$

$$c) \sqrt[3]{\frac{125}{8}}$$

$$d) \sqrt[6]{-64}$$

9. Simplifica los siguientes radicales:

$$a) \sqrt{2500}$$

$$b) \sqrt[3]{8000}$$

$$c) \sqrt{x^{-10} y^4}$$

$$d) \sqrt[4]{6480}$$

$$e) \sqrt{\sqrt{x}}$$

$$f) \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x}}}$$

$$g) \sqrt[3]{15x^5 \cdot \sqrt{3x}}$$

$$h) \sqrt{9x^2 + 12x + 4}$$

10. Efectúa las operaciones siguientes:

$$a) \sqrt{15} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[5]{100}$$

$$b) \frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt{2}}$$

$$c) \sqrt[4]{6x^2 y} \cdot \sqrt[6]{2xy^5 z}$$

d) $\frac{\sqrt[3]{2xyz^2}}{\sqrt[4]{x^3y^2}}$

e) $(\sqrt{2}-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})$

f) $(5\sqrt{7}-2\sqrt{2})^2$

11. Calcula:

a) $\sqrt{150} + \sqrt{96} - \sqrt{6} + \sqrt{486} - \sqrt{48}$

b) $\frac{\sqrt[4]{486}}{\sqrt[4]{3}} + \sqrt[4]{125} \cdot \sqrt[4]{10} - \sqrt{\sqrt{6561}} + \sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{625}$

c) $\sqrt{12a} - 3\sqrt{75a^3} + 2\sqrt{3a} - a\sqrt{48a}$

12. Simplifica:

a) $\frac{\sqrt[4]{15} \cdot \sqrt[3]{18}}{\sqrt[3]{20}}$

b) $\left[\frac{(\sqrt{6})^3 \cdot \sqrt[6]{45}}{4 \cdot \sqrt[4]{\sqrt{50}}} \right]^3$

c) $\left[\frac{\sqrt[3]{ab^2} \cdot \sqrt[4]{a^3b}}{(\sqrt[6]{a^{-5}})^2 \cdot \sqrt[5]{a^2b}} \right]^{-4}$

d) $\frac{a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{3}{2}} \cdot c^2 \cdot a^{\frac{1}{2}}}{c^2 \cdot \left(a^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{5}{2}} \cdot c^{\frac{5}{3}}}$

13. Racionaliza las expresiones siguientes:

a) $\frac{5}{\sqrt{2}}$

b) $\frac{8}{3\sqrt{5}}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[5]{2^3}}$

d) $\frac{x}{\sqrt[5]{x^2y^3}}$

e) $\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$

f) $\frac{3}{4-\sqrt{3}}$

g) $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}+3}$

h) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2\sqrt{3}}$

14. Calcula: $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3^2}} + 2\sqrt[3]{5} - \frac{\sqrt[6]{4}}{\sqrt[6]{3^4}} + 3 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}}$

15. a) Expresa en notación científica 0,000 000 000 325 y aproxímalo por un número con dos cifras significativas. ¿Cuál es el orden de magnitud?

b) Aproxima el número 5 843 729 545 221 hasta los miles de millón y expresa la aproximación en notación científica.

c) Calcula $\frac{5,34 \cdot 10^{-5} - 2,46 \cdot 10^{-3}}{300000 + 4,2 \cdot 10^4}$ expresando el resultado en forma decimal y en notación científica.

16. Determina qué valores puede tomar a en las siguientes desigualdades:

a) $13+a \leq -5$

b) $7-a > 8$

c) $3a-6 < 9+2a$

d) $6a > -9$

e) $4-3a \geq 2$

f) $5a-22 \leq 10+7a$

17. Representa gráficamente sobre la recta real, de forma exacta, los siguientes números:

$$5, -1, \frac{2}{5}, -\frac{2}{3}, \frac{11}{4}, 0,\bar{3}, \sqrt{6}, -\sqrt{10}$$

18. Representa sobre la recta real los siguientes intervalos:

a) $A=[-5, -3]$

b) $B=[2, 7]$

c) $C=[-4, 5]$

d) $D=[-3, 9]$

e) $E=(-\infty, 3)$

f) $F=[7, \infty)$

Halla los conjuntos de puntos $A \cup C, A \cup B, B \cup F, A \cup D, A \cup E, B \cup C \cup E, C \cap D, E \cap F, B \cap F, A \cap D, A \cap E, A \cap B \cap C$.

19. a) Indica qué intervalo es el entorno simétrico de centro 2,4 y radio 3. Representalo gráficamente sobre la recta real.

b) Representa gráficamente el entorno reducido de centro -5 y radio 1,3. ¿Qué conjunto de puntos forman ese entorno?

c) Dibuja sobre la recta real el entorno de centro 8 y radio -0,5.

20. a) Halla el centro y el radio del entorno $(-9, -2)$. Representalo.
- b) ¿Qué conjunto de puntos forman el entorno reducido del mismo centro y radio que el entorno anterior?
- c) Halla el centro y el radio del entorno $[-4, 7]$.

2. Matemática financiera.

- Determina los siguientes logaritmos utilizando la calculadora:
 - $\log 26,4$
 - $\ln 724$
 - $\log_5 0,16$
 - $\log_2 (-4)$
- Sin emplear la calculadora, halla el valor de x en los siguientes casos:
 - $x = \log_5 \sqrt{125}$
 - $x = \log_3 \frac{1}{81}$
 - $x = \log_{\frac{1}{2}} 1024$
 - $x = \log_4 \frac{16}{\sqrt[4]{64}}$
- Halla el valor de x en los siguientes casos:
 - $\log_7 x = -5$
 - $\log_2 x = \frac{2}{3}$
 - $\log_5 x = 0$
 - $\log_3 x = -\frac{2}{5}$
- Halla el valor de x en los siguientes casos:
 - $\log_x 81 = -4$
 - $\log_x 1 = 0$
 - $\log_x 10000 = 2$
 - $\log_x \frac{1}{36} = -2$
- Indica entre qué valores enteros están los siguientes logaritmos:
 - $\log 5$
 - $\log 147,5$
 - $\log 0,0019$
- ¿Entre qué valores está x en los siguientes casos?
 - $\log x = 2,61$
 - $\log x = 0,5$
 - $\log x = -3,1$
- Aplica las propiedades de los logaritmos para desarrollar las siguientes expresiones:
 - $A = \frac{5x^2 y}{3z}$
 - $P = \frac{M + N^3}{\sqrt{2M^2 N^5}}$
- Aplica las propiedades de los logaritmos para eliminarlos de las siguientes expresiones:
 - $\log M = n \log P - 2 \log Q + \log R$
 - $3 \log x - 4 \log y = \log z + 2 \log t$
- Calcula el capital en que se convertirán 1000 € durante 2 años al 10 % de interés simple.
- ¿Cuánto tiempo hay que tener 3000 € al 10 % de interés simple para que se conviertan en 3900 €?
- Calcula los intereses que generan 12000 € colocados al 7 % de interés simple durante 4 años, si los intereses se devengan:
 - Anualmente
 - Mensualmente
- ¿Qué capital se forma si se colocan 5000 € a interés compuesto al 8 % durante 25 años?
- Una caja de ahorros de tu localidad te oferta tres fórmulas distintas para colocar tu dinero, que asciende a 4000 € a interés compuesto durante 10 años:
 - Fórmula A: Capitalización trimestral al 8,6 % anual.
 - Fórmula B: Capitalización anual al 8,65 %.
 - Fórmula C: Capitalización mensual al 8,55 % anual.
 ¿Cuál te parece mejor?
- Unos padres han colocado los 3000 € que tienen ahorrados, en una cartilla infantil a nombre de su hijo, a interés compuesto del 4 %, en el día de su nacimiento. Calcula qué cantidad recibirá éste al cumplir los 21 años.

15. Averigua el capital necesario para que, a un 7 % anual durante 8 años, se convierta en 5000 €
 - a) a un interés simple.
 - b) a un interés compuesto (con períodos de capitalización anuales).
16. Una persona ingresa durante 15 años, en un plan de jubilación, 2000 € al principio de cada año. La compañía de seguros le genera un interés del 6 % fijo anual, durante toda la vida del plan. ¿Qué capital se habrá formado al final de los 15 años?
17. ¿Qué anualidad habrá de colocarse al 13 % de interés compuesto para reunir en 5 años doce mil euros?
18. Una persona debe amortizar un préstamo de 50000 €, al 9 % anual fijo en el plazo de 15 años. ¿Qué cantidades fijas e iguales debe pagar al final de cada año para amortizar la deuda?
19. Una empresa maderera compra un camión, y se compromete a pagarlo en 13 anualidades al 6 %. Cada anualidad de amortización asciende a 21000 euros. ¿Cuándo costó el camión?
20. Para amortizar una deuda de 29500 €, hemos abonado varias anualidades de 4200 € cada una al 7 % anual. ¿Durante cuántos años?

3. Expresiones algebraicas.

1. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\left(3x^4 - 6x^2 - \frac{1}{2}x + 4\right)(x^4 + 3x^2 - 2) - (5x^3 - 2)^2$

b) $6x^2 + 5x - 1 - (2x^3 + x^2 + 3)\frac{1}{3}x^2 + 4x$

c) $(4x^3 - 4x + 1)^2 + 5x - 3(2x + 5)^4$

2. Halla el cociente y el resto de la división $(4x^5 - 2x^4 + x^2 - 5) : (-2x^3 - 2x + 1)$

3. Al dividir un polinomio por $x^2 - 1$ se ha obtenido $x + 3$ en el cociente y $x - 2$ en el resto. ¿Cuál es ese polinomio?

4. Halla el valor que debe tener m para que el resto de la división $(3x^3 + mx^2 + x - 4) : (x - 3)$ sea igual a 5.

5. Calcula m para que el polinomio $x^3 - mx^2 + 5x - 2$ sea divisible por $x + 1$.

6. a) Escribe un polinomio que tenga las raíces 4 (doble), -3 y -1 .

b) Escribe un polinomio de tercer grado que tenga una sola raíz real (simple).

7. Descompón en factores:

a) $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12$

b) $2x^3 - 5x^2 - 23x - 10$

c) $3x^4 + x^3 - 9x^2 - 9x - 2$

d) $15ab^2c - 10a^2b^2c^2 + 20ab^3$

e) $9a^2 - 25b^6$

f) $16x^4 - 40x^2 + 25$

8. Escribe un polinomio de 2º grado tal que $P(-4) = 0$ (es decir, -4 es raíz de $P(x)$) y $P(-2) = -8$.

9. Inventa dos polinomios cuyo máximo común divisor sea $x(x+1)$ y cuyo mínimo común múltiplo sea $x^3(x^2-1)(x^2+1)$.

10. Simplifica:

a) $\frac{ax + a}{a^2x + a^2}$

b) $\frac{x^2 - 1}{x^4 - 1}$

c) $\frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{3x^2 - 9x + 6}$

d) $\frac{mx^2 - 25m}{m^3x^2 + 25m^3 - 10m^3x}$

e) $\frac{x^2 - x - 48}{x^2 - 8x + 7}$

f) $\frac{4x}{4x^2 - 6x}$

11. Opera y simplifica:

a) $\left(\frac{5+x}{x^2+x} - \frac{4x}{3x+3} + \frac{x-3}{x^2-x}\right) \cdot \frac{6x^3-6x^2}{3+2x}$

b) $\frac{x-2}{2-x} - \frac{x^2}{x^2-4} - \frac{x-2}{x+2}$

c) $\frac{\frac{1}{2(x+h)} - \frac{1}{2x}}{h}$

d) $\frac{3x+2}{x-1} : \frac{4x+2}{4x} - \frac{9x+6}{2x^2-x-1} + \frac{7}{2x^2-2x}$

12. Descompón en suma de fracciones simples:

a) $\frac{3x^2+1}{x^2-1}$

b) $\frac{2x-1}{x^2+2x-8}$

c) $\frac{2x^2-10x+20}{x^3-2x^2-4x+8}$

4. Ecuaciones y sistemas de ecuaciones.

1. Comprueba si cada valor de x es solución de la ecuación a la que acompaña:

a) $\frac{x-3}{x+1} - \frac{2x+1}{x-3} = -\frac{11x}{x+1}$ $x=4$ b) $\frac{4}{x-2} = \frac{x+2}{2x-4}$ $x=2$

2. A partir de cada una de las igualdades dadas, obtén distintas igualdades equivalentes hasta despejar la variable indicada:

a) $F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$ (Despeja m) b) $V = I(R+r)$ (Despeja r) c) $t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ (Despeja x)

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{2x-5}{6} + \frac{1-4x}{10} = \frac{x+3}{12} - \frac{3x-2}{15}$ b) $\frac{3x-1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{4-2x}{3} - 5 \right) = \frac{4+2x}{3} - \frac{3x+1}{2}$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $15x^2 - 3 = 0$ b) $4 + 3x^2 = 0$ c) $8x^2 + 5x = 0$ d) $-x^2 + 6x - 8 = 0$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$ b) $x^4 - 16 = 0$ c) $4x^4 + 3x^2 - 1 = 0$ d) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

6. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $6x^4 - 3x^3 - 15x^2 - 6x = 0$ b) $4x^4 - 20x^3 + 27x^2 - x - 10 = 0$

7. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x-4}{x^2-4} - \frac{2x}{x^2-x-2} = 2 - \frac{x-1}{x+1}$ b) $\frac{x}{x^2-1} - \frac{x-4}{2x+2} = \frac{x-2}{x} + \frac{2}{x^2-x}$

8. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x - \sqrt{169 - x^2} = 17$ b) $\sqrt{6x+1} + \sqrt{3x-3} = 8$

9. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\log x^3 = \log 6 + 2 \log x$ b) $2 \log(x+5) - \log(3x-5) = 1$

10. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $25^{3x-5} = \frac{1}{5^{2x-1}}$ b) $4^{5x+3} = 27^x$ c) $3^{2x+2} - 28 \cdot 3^x + 3 = 0$ d) $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

11. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $|x|=23$ b) $|x|=-12$ c) $|2x+4|=8$ d) $|9-5x|=3$

12. a) Escribe una ecuación de tercer grado cuyas soluciones sean 3, 5 y -1.

b) Escribe una ecuación de tercer grado cuyas soluciones sean -2 (doble) y 4.

c) Escribe una ecuación cuyas soluciones sean 0 (triple), 2 y -3 (doble). ¿Cuál es su grado?

13. Escribe una ecuación que no tenga solución, otra con una única solución y otra con infinitas soluciones.

14. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones con dos incógnitas y clasifícalos según su número de soluciones:

$$\begin{array}{llll}
 \text{a) } \left. \begin{array}{l} 5x - 3y = 1 \\ 2x + 4y = -3 \end{array} \right\} & \text{b) } \left. \begin{array}{l} 3x + y = 5 \\ 6x + 2y = 6 \end{array} \right\} & \text{c) } \left. \begin{array}{l} -4x + 2y = -2 \\ 2x - y = 1 \end{array} \right\} & \text{d) } \left. \begin{array}{l} 7x - \frac{1-y}{3} = 5 \\ 21x = 16 - y \end{array} \right\} \\
 \text{e) } \left. \begin{array}{l} 2y - 3(x+1) = 6 - (x+y) \\ \frac{x-1}{2} - \frac{y+3}{4} = -\frac{y}{2} - \frac{2-x}{2} \end{array} \right\} & \text{f) } \left. \begin{array}{l} 8x + 7y = 9 \\ 5x - y = 11 \\ x + y = 5 \end{array} \right\} & \text{g) } \left. \begin{array}{l} x + 3y = 10 \\ 2x - 3y = 2 \\ x + y = 6 \end{array} \right\} & \text{h) } \left. \begin{array}{l} x^2 - 3y = -8 \\ 2x + y(y-1) = 8 \end{array} \right\}
 \end{array}$$

15. Escribe las ecuaciones de dos rectas en el plano secantes, luego las de dos rectas paralelas, y, por último, las de dos rectas coincidentes.

16. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones con tres incógnitas y clasifícalos:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } \left. \begin{array}{l} 3x + y - z = 1 \\ 2x - y + z = 0 \\ x + y - z = 3 \end{array} \right\} & \text{b) } \left. \begin{array}{l} 2x - 3y + 2z = -2 \\ 4x - 2y + 3z = 0 \\ -3x + 2y + 3z = -5 \end{array} \right\} & \text{c) } \left. \begin{array}{l} 2x + y - z = 0 \\ x - 2y + z = 5 \end{array} \right\}
 \end{array}$$

17. Resuelve los siguientes sistemas:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } \left. \begin{array}{l} 2^x - 4^{2y} = 0 \\ x - y = 15 \end{array} \right\} & \text{b) } \left. \begin{array}{l} 5^{x+y} = 32,6 \\ 6^x = 7^y \end{array} \right\} & \text{c) } \left. \begin{array}{l} 2^x = 3^y \\ x - y = 0,5 \end{array} \right\}
 \end{array}$$

18. Resuelve los siguientes sistemas:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } \left. \begin{array}{l} \log x - \log y = 7 \\ \log x + \log y = 3 \end{array} \right\} & \text{b) } \left. \begin{array}{l} \log(x+y) + \log(x-y) = \log 33 \\ e^x = \frac{e^{11}}{e^y} \end{array} \right\} & \text{c) } \left. \begin{array}{l} \log x + 3\log y = 5 \\ \log \frac{x}{y} = 3 \end{array} \right\}
 \end{array}$$

19. Un rectángulo tiene la misma área que un cuadrado de 96 m de lado; halla las dimensiones del rectángulo si la altura es los 9/16 de la base.
20. Calcula los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 10 cm, sabiendo que uno de los catetos es la semisuma de la hipotenusa y el otro cateto.
21. Halla dos números impares consecutivos tales que la diferencia de sus cuadrados sea 8000.
22. La nota media de los aprobados en un examen de matemáticas fue 6,5 y la de los suspensos, 3,2. En la clase son 30 alumnos y alumnas y la nota media global fue 5,29. ¿Cuántos aprobaron y cuántos suspendieron?
23. Un hombre le dijo a su hijo: *Cuando transcurra la tercera parte de los años que yo tengo, tú tendrás la mitad de mi edad actual. Sí, contestó el hijo, pero hace sólo 4 años, tu edad era 11 veces la mía.* ¿Cuál es la edad actual del hijo?
24. El lunes acudió mi padre a la cafetería y por dos helados, un café y cuatro pasteles pagó 16 €; el martes en el mismo sitio, mi madre pagó otros 16 € por tres helados, dos cafés y dos pasteles y ayer, jueves, yo pagué 32 € por tomar cuatro helados y tres cafés. Considerando que los productos del mismo tipo tenían igual precio ¿crees que es posible?

5. Inecuaciones y sistemas de inecuaciones.

1. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa gráficamente el conjunto solución:

a) $6x-5 \geq x+3$

b) $3x-9 < 8+10x$

c) $\frac{x+4}{3} - \frac{x-4}{5} > 2 + \frac{3x+1}{15}$

d) $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(\frac{x+2}{4} - \frac{3x-1}{2} \right) \geq \frac{x}{6} - \frac{2x-1}{3}$

e) $\frac{x+5}{3} - \frac{2}{3} \left(\frac{4x-1}{2} - \frac{3x+2}{3} \right) \leq \frac{1}{6} - \left(\frac{2x-1}{3} - \frac{7x}{4} \right)$

2. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } 4x-8 \leq \frac{x+4}{2} - 5x \\ 3x-2 \left(x - \frac{x+1}{3} \right) > 6 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \text{b) } -\frac{x}{2} - (5x+2) < 8x+5 \\ 3x + \frac{6-x}{4} > 2 - \frac{x-5}{2} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \text{c) } 7-x+2(x-3) \leq 4x \\ \frac{3x+1}{5} \leq \frac{x-4}{2} \end{array} \right\}$$

3. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa gráficamente el conjunto solución:

a) $x^2+2x-8 > 0$ b) $-2x^2+9x-4 < 0$ c) $3x^2-15x \leq 0$ d) $\frac{x-4}{2} - x(x+2) < 3x-36$

4. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa el conjunto solución:

a) $\frac{2x-6}{x+2} > 0$ b) $\frac{x+1}{2x-1} \geq 1$ c) $\frac{x^2+x-2}{2x-4} \leq 0$ d) $\frac{2x+4}{x^2+x-12} \geq 0$

5. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } 2x^2 < 8 \\ x^2 + 2x - 3 \geq 0 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \text{b) } x^2 - 4x + 4 > 0 \\ \frac{x+3}{x+2} \geq 0 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \text{c) } \frac{4x-1}{x+3} \leq 2 \\ \frac{x^2-9}{x+2} \leq 0 \end{array} \right\}$$

6. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $2x-4y-3 < 0$ b) $x+5y-5 \geq 0$ c) $3x + \frac{y}{2} \leq 2(x+y)$ d) $4x+2 > \frac{y-1}{2} + x$

7. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } 4x-2y > 5 \\ x+y-3 < 0 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \text{b) } x-6y+3 \leq 0 \\ 2x-y \geq 8 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \text{c) } \frac{3y}{2} + 5 > x - \left(y + \frac{1}{2} \right) \\ \frac{x-5}{2} \leq \frac{y+1}{3} \end{array} \right\}$$

8. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $|x| < 9$ b) $|x| \geq 7$ c) $|x+10| \leq 4$
 d) $|x-25| > 10$ e) $|8-3x| < 2$ f) $|6+4x| \geq 5$

6. Funciones.

- a) Halla la ordenada del punto de abscisa -2 en la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 2(x - 3)$.

b) ¿Para qué valor la imagen por la función $f(x) = -2x^2 + x + 2$ es -19 ?

c) ¿Pertenece el punto $(-2, 1)$ a la gráfica de la función $y = -x^6 - 4$?

- Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ b) $f(x) = \frac{6x^2 - 2}{4x + 1}$ c) $f(x) = \sqrt{25 - 2x^2}$

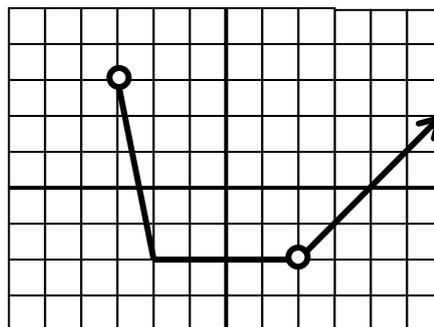
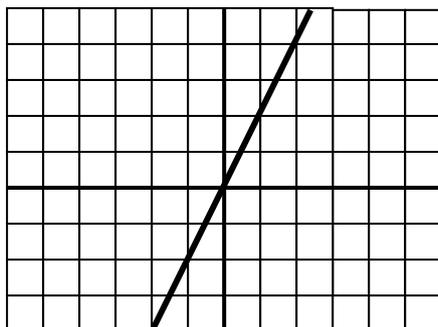
d) $y = \sqrt{\frac{x+5}{x^2-1}}$ e) $y = \frac{\sqrt{x^2 - 3x - 10}}{x - 1}$ f) $y = \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x - 2}}$

- Representa gráficamente las siguientes funciones e indica su dominio y recorrido:

a) $f(x) = |x|$ b) $f(x) = \text{Ent}(x)$ c) $f(x) = \text{Dec}(x)$

d) $f(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } x < -2 \\ 2x + 2 & \text{si } -2 < x < 1 \\ -x + 2 & \text{si } 1 \leq x < 4 \end{cases}$ e) $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < -3 \\ x + 5 & \text{si } -3 < x \leq 2 \\ -x - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ f) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ |x| & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- Halla las funciones a las que corresponden las siguientes gráficas:

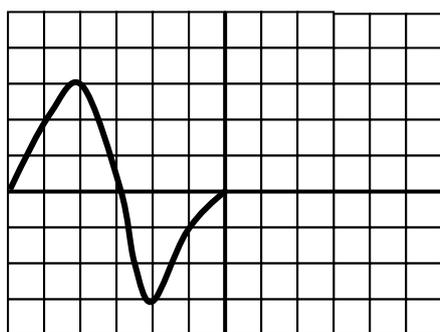


- Estudia la simetría de las siguientes funciones:

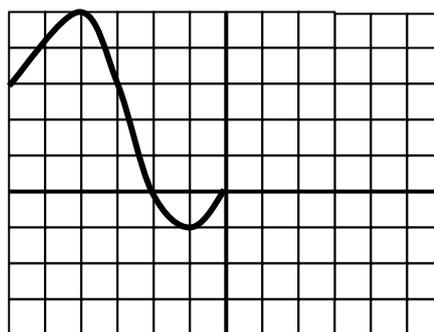
a) $f(x) = 7x^4 + 2x^2 - 3$ b) $g(x) = \frac{-3x^3}{x + 2x^5}$ c) $h(x) = \frac{x^2 + 2}{x^3 - 1}$

d) $j(x) = \frac{5x^4 - 2x^2}{x^3 - 8x}$ e) $k(x) = \frac{4x^4 - 6}{-x^2 + 7}$ f) $l(x) = \frac{5x^3 - 1}{4x^5 + 2x}$

- Completa las gráficas siguientes para que correspondan al tipo de función que se señala:

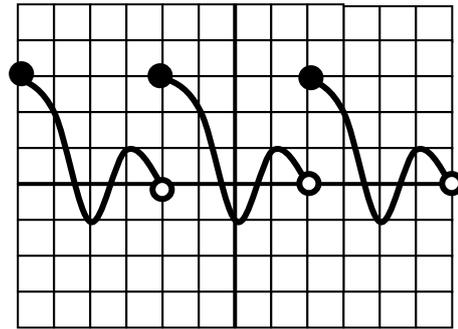
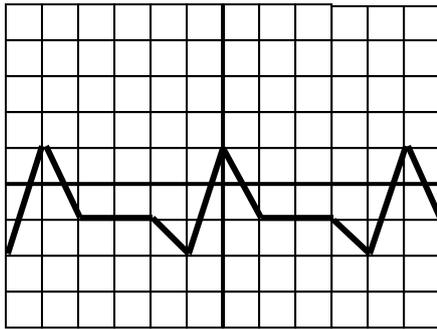


par



impar

7. Señala el periodo de las siguientes funciones:



8. Halla los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{3x-9}{x+1}$

b) $g(x) = x^2 + 3x - 4$

c) $h(x) = \frac{4x^2 + 16}{x-5}$

9. Dadas las funciones $f(x) = \frac{3x-5}{x^2-4}$, $g(x) = \frac{x+4}{2x+4}$ y $h(x) = \frac{5-2x}{4}$, halla:

a) $f(x)+g(x)-h(x)$

b) $f(x) \cdot h(x)$

c) $3f(x)-g(x) \cdot h(x)$

d) $\frac{f(x)}{g(x)}$

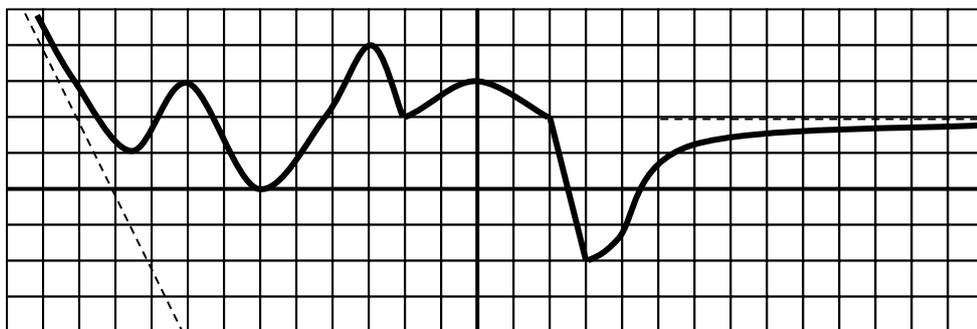
e) $(f \circ h)(x)$

f) $(h \circ f)(x)$

g) $(g \circ f \circ h)(x)$

10. Sean las funciones $f(x) = \sqrt{\frac{2x-5}{x+2}}$ y $g(x) = \frac{x+1}{x-3}$. Halla $g^{-1}, f^{-1}, g \circ f^{-1}, f \circ g^{-1}, f^{-1} \circ g, (f \circ g)^{-1}$.

11. Observa la siguiente función y responde a las cuestiones que se plantean:



a) ¿Cuáles son los intervalos de crecimiento y decrecimiento?

b) ¿Hay máximos o mínimos relativos? ¿Cuáles?

c) ¿Está la función acotada superiormente? En caso afirmativo, indica el supremo y el máximo (si existe).

d) ¿Está la función acotada inferiormente? En caso afirmativo, indica el ínfimo y el mínimo (si existe).

e) ¿Es una función acotada?

f) ¿Tiene alguna asíntota? ¿Cuál?

12. Dibuja la gráfica que indica el costo de una carrera de taxi de 2 km, sabiendo que cada 300 m cuesta 50 céntimos y la bajada de bandera inicial 1 €.

13. El coste de la energía eléctrica se obtiene mediante un sumando fijo y otro proporcional a la cantidad de energía gastada. En dos meses distintos se ha pagado 35,70 € por 340 kWh y 31,14 € por 283 kWh. ¿Cuál es el sumando fijo?

7. Funciones elementales.

1. Representa gráficamente las siguientes funciones y estudia el dominio, el recorrido, la continuidad, la monotonía, los extremos relativos, la curvatura y las asíntotas:

a) $y = -\frac{1}{3}x$

b) $y = 5x + 2$

c) $y = 2x^2 - x + 2$

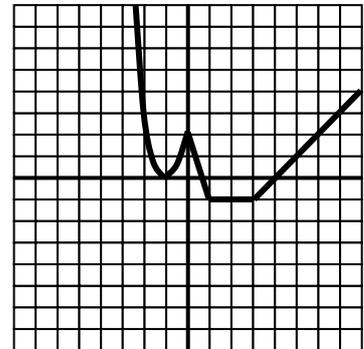
d) $y = 4$

e) $y = -\frac{2}{x}$

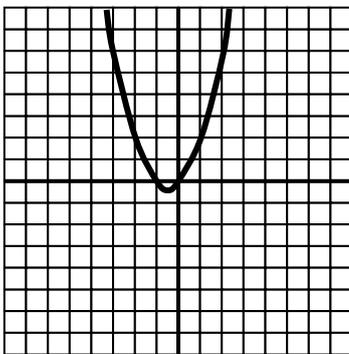
2. Determina la cantidad y el precio de equilibrio de un producto cuyas funciones de oferta y demanda son $f_o(p) = 0,05p^2 - 40$ y $f_d(p) = 800 - 2p$.

3. Determina la cantidad y el precio de equilibrio de un producto cuyas funciones de oferta y demanda son $f_o(p) = 500 + 3p$ y $f_d(p) = 0,005p^2 - 10p + 800$.

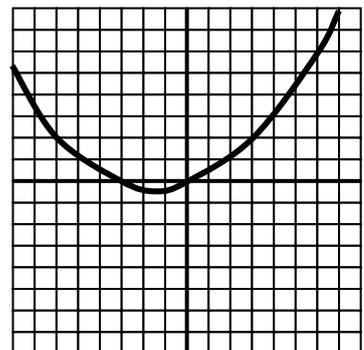
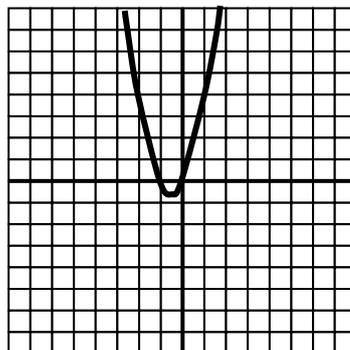
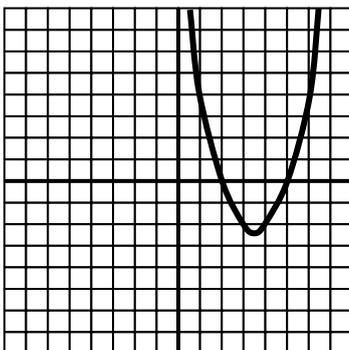
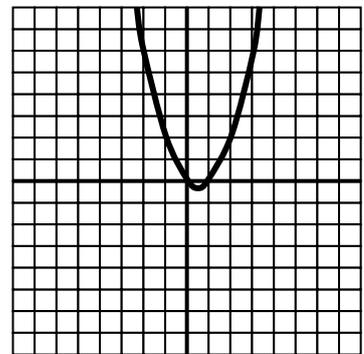
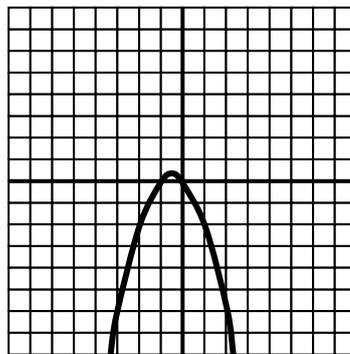
4. Conocida la gráfica de la función $f(x)$, representa las funciones $f(-x)$, $-f(x)$, $|f(x)|$, $f(|x|)$, $f^{-1}(x)$, $f(x-2)+1$, $f(x/2)$, $f(x)/2$:



5. Observa y compara las gráficas siguientes y deduce la ecuación de cada una de ellas:



$f(x) = x^2 + x$



6. Representa gráficamente las siguientes funciones y estudia el dominio, el recorrido, la continuidad, la monotonía, los extremos relativos, la curvatura y las asíntotas:

a) $f(x) = |-3|$ **b)** $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$ **c)** $f(x) = |4x + 1|$ **d)** $f(x) = \left| \frac{3}{x} \right|$
e) $f(x) = -5|x|$ **f)** $f(x) = 2|x| - 3$ **g)** $f(x) = \frac{4}{|x|}$ **h)** $f(x) = |x|^2 - 6|x| + 8$

7. Representa gráficamente las siguientes funciones y estudia el dominio, el recorrido, la continuidad, la monotonía, los extremos relativos, la curvatura y las asíntotas:

a) $f(x) = -\frac{2}{x} + 5$ **b)** $f(x) = \frac{3}{x-4}$ **c)** $f(x) = \frac{3x+1}{x+1}$ **d)** $f(x) = \left| \frac{5-2x}{x-2} \right|$ **e)** $f(x) = \frac{|x|+2}{|x|-1}$

8. Representa gráficamente la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } 1 \leq x < 4 \\ x - 3 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$.

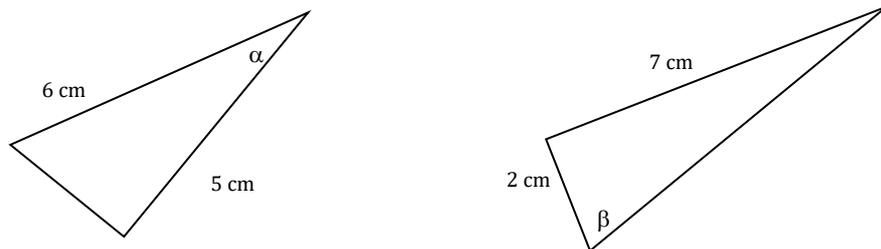
9. Representa gráficamente las siguientes funciones y estudia el dominio, el recorrido, la continuidad, la monotonía, los extremos relativos, la curvatura y las asíntotas:

a) $y = 3^{x+2}$ **b)** $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x - 3$ **c)** $y = 2 + \log_5 x$ **d)** $y = \log_{\frac{1}{6}}(x-3)$
e) $y = -3^x$ **f)** $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{|x|}$ **g)** $y = |\log_5 x|$ **h)** $y = 2\log_{\frac{1}{6}} x$

10. ¿Cuánto mide el ángulo correspondiente a un arco de 5 cm en una circunferencia de 10 cm de radio? ¿Y si el arco mide 25 cm y el radio 0,6 m? Expresa el resultado en radianes, en grados sexagesimales y en grados centesimales.

11. **a)** Expresa en radianes los siguientes ángulos: $18^\circ 21' 36''$ $226^\circ 41' 12''$
b) Expresa en grados los siguientes ángulos: $7\pi/3$ radianes 4,3 radianes

12. Halla todas las razones trigonométricas de los ángulos α y β :



13. Expresa las siguientes razones trigonométricas en función una razón de un ángulo del primer cuadrante y halla su valor:

a) $\text{sen } 87^\circ$ **b)** $\text{cos } 110^\circ$ **c)** $\text{tg } 219^\circ$ **d)** $\text{cosec } 338^\circ$
e) $\text{sec } 527^\circ$ **f)** $\text{cotg } 12$ **g)** $\text{sen } 0^\circ$ **h)** $\text{cos } 90^\circ$
i) $\text{tg } 180^\circ$ **j)** $\text{cosec } 270^\circ$ **k)** $\text{cotg } 360^\circ$ **l)** $\text{sen } 45^\circ 8' 30''$
m) $\text{sec } 382^\circ$ **n)** $\text{cos } 1576^\circ$ **o)** $\text{cosec } 2365$ **p)** $\text{tg } 1029^\circ$

14. Halla el ángulo o ángulos correspondientes a las siguientes razones trigonométricas:

a) $\text{sen } x = 0$ **b)** $\text{sen } x = 1$ **c)** $\text{sen } x = 1/5$ **d)** $\text{sen } x = -0,62$
e) $\text{cos } x = 0$ **f)** $\text{cos } x = -1$ **g)** $\text{cos } x = 0,25$ **h)** $\text{cos } x = -4/5$
i) $\text{tg } x = 0$ **j)** $\text{tg } x = 1$ **k)** $\text{tg } x = 14,2$ **l)** $\text{tg } x = -6/7$

m) $\operatorname{cosec} x=5$ **n)** $\sec x=-2,2$ **o)** $\cotg x=-5,8$ **p)** $\sec x=1/6$

15. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\operatorname{sen}(2x+45^\circ)=\frac{2}{3}$ **b)** $\cos(4x-30^\circ)=-0,7$ **c)** $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=10$ **d)** $2\operatorname{sen}^2x+\operatorname{sen} x=1$

16. Representa gráficamente las siguientes funciones y estudia el dominio, el recorrido, la continuidad, la periodicidad, la monotonía, los extremos relativos, la curvatura y las asíntotas:

a) $y=\operatorname{sen}(x+30^\circ)$ **b)** $y=\cos x-2$ **c)** $y=2 \operatorname{sen} x$ **d)** $y=\cos\frac{x}{3}$
e) $y=-\operatorname{tg} x$ **f)** $y=|\operatorname{tg} x|$ **g)** $y=2\pi+\arccos x$ **h)** $y=\operatorname{arcsen} 2x$

17. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2+6x+9 & \text{si } x < -2 \\ -3 & \text{si } -2 < x < 1 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ **b)** $f(x)=\begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0 \\ 1-x^2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ \log_2 x - 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

8. Interpolación.

- Una función lineal pasa por los puntos $A(5, 19)$ y $B(-1, -5)$.
 - ¿Cuál es la ecuación de la recta de interpolación?
 - ¿Cuál es la imagen de $x=0$?
 - ¿Para qué valor de x la imagen es -2 ?
- Una función cuadrática pasa por los puntos $A(0, -6)$, $B(2, 12)$ y $C(-1, -9)$.
 - ¿Cuál es la función de interpolación?
 - ¿Cuál es la imagen de 3 ?
 - ¿Para qué valor la imagen es 12 ?
- En el laboratorio se obtienen los siguientes resultados al medir los gramos de un compuesto A y los de otro B presentes en ciertos materiales:

A (g.)	2	4	5
B (g.)	15	55	84

- Obtén la función cuadrática que permite obtener el número de gramos del compuesto B en función de los de A .
 - ¿Cuántos gramos de B corresponderían a 3 gramos de A ?
 - ¿Cuántos gramos de A cabría esperar para 119 gramos de B ?
- Se estudia la altura que alcanza un proyectil en función del tiempo transcurrido desde el lanzamiento, obteniendo los resultados de la tabla:

t (s.)	1	4	10
Altura (m.)	3	66	462

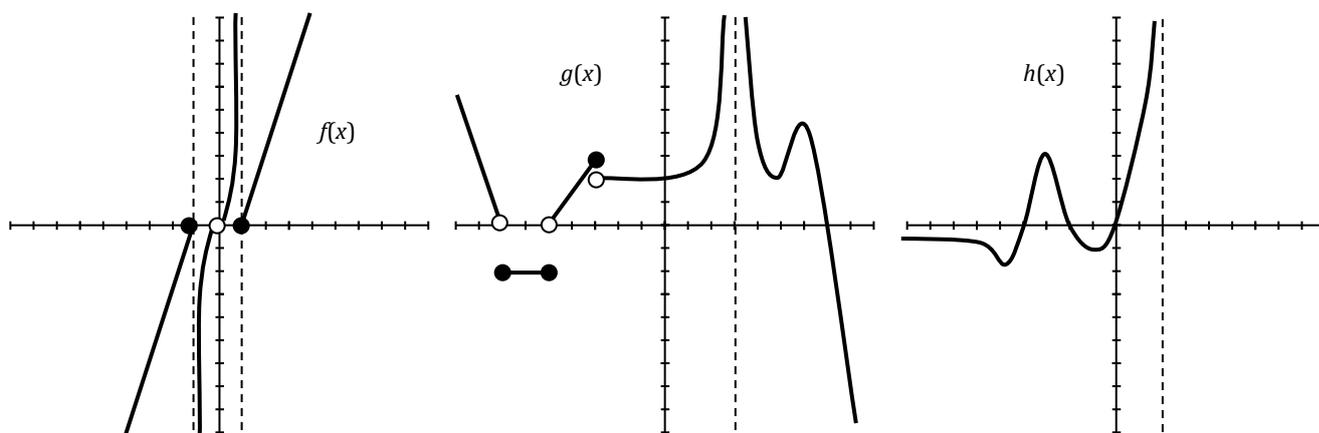
- ¿Qué altura alcanzará al cabo de 11 segundos?
- ¿Cuándo alcanzará la altura de 14 m.?

9. Límites y continuidad.

Calcula los siguientes límites:

- | | | |
|---|---|---|
| <p>1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{n+1} - \frac{3}{n+2} \right)$</p> <p>2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-n^2 + 3n - 1)$</p> <p>3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 2}{3n - n^2}$</p> <p>4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n^2 - 5}{\frac{6}{n} - 5}$</p> <p>5. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{9n-2}{3n-6}}$</p> <p>6. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^4 + 7} - n^2)$</p> <p>7. $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + 3x - 7)$</p> <p>8. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (8x^5 - 3x^2 + 9)$</p> <p>9. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x - 1}$</p> <p>10. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2}$</p> | <p>11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2+x)^3 - 8}{x}$</p> <p>12. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x^2 + 6x}{x^3 - 2}$</p> <p>13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x}$</p> <p>14. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - 6} - x + 2)$</p> <p>15. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 18}{\sqrt{x+1} - 2}$</p> <p>16. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^3 + 6x - 5}{-4x + 2}$</p> <p>17. $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-5}{2x+3}$</p> <p>18. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 + 3}{(x-5)^2}$</p> <p>19. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 5} - \sqrt{x^2 + 6x}}{5x + 2}$</p> <p>20. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x+5} + x)$</p> | <p>21. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3} - x}{x^2 - 5x + 6}$</p> <p>22. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x^2 + 3x + 6}{\sqrt{2x^2 - 5x}}$</p> <p>23. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^5 - 8x^3}{3x^2}$</p> <p>24. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 3} + 2x - 5)$</p> <p>25. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{5-x}{x^2 + 3x - 4}$</p> <p>26. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4 - \sqrt{6x+10}}{2 - \sqrt{x+3}}$</p> <p>27. $\lim_{x \rightarrow 3} (2x+5)^{x-3}$</p> <p>28. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x+2}{x^2 + 4x + 4} \right)^{\frac{2}{x}}$</p> <p>29. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{6x^2 + 2} + \sqrt{x-3})$</p> <p>30. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x-2} - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^3+2} + x^2}$</p> |
|---|---|---|

31. Observa las gráficas y calcula los límites que se indican:

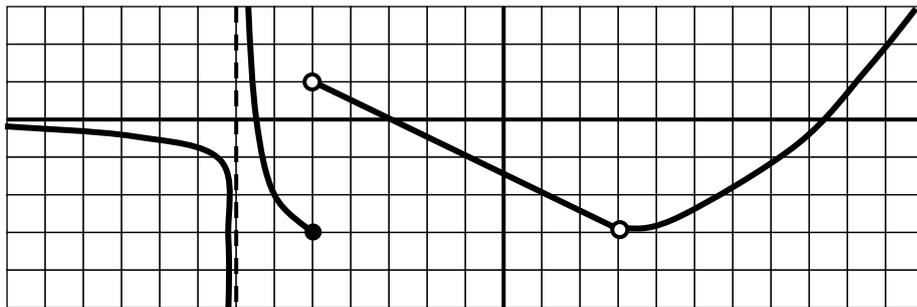


- | | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ | b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ | c) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ | d) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ | e) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ |
| f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ | g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ | h) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ | i) $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$ | j) $\lim_{x \rightarrow -7} g(x)$ |

- k)** $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ **l)** $\lim_{x \rightarrow 5} g(x)$ **m)** $\lim_{x \rightarrow -5} g(x)$ **n)** $\lim_{x \rightarrow -3} g(x)$ **p)** $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$
q) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ **r)** $\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x)$ **s)** $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$ **t)** $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ **u)** $\lim_{x \rightarrow -3} h(x)$

32. ¿Son continuas las funciones del ejercicio anterior? Si no es así, indica en qué puntos son discontinuas y qué tipo de discontinuidad se presenta.

33. Observa la siguiente función:



Halla:

- a)** $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ **b)** $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ **c)** $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ **d)** $\lim_{x \rightarrow -5} f(x)$ **e)** $\lim_{x \rightarrow -7} f(x)$

Estudia la continuidad de la función.

34. Estudia la continuidad de $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$ en los puntos $x = 0$ y $x = 1$.

35. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

- a)** $f(x) = \frac{3x+5}{x^2-4}$ **b)** $f(x) = \frac{2x-12}{x^2-12x+36}$ **c)** $f(x) = \frac{7}{(x+3)^2}$ **d)** $f(x) = \frac{2x+4}{2x^2+3x-2}$

- e)** $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x+1 & \text{si } 2 < x < 4 \\ 9 & \text{si } x > 4 \end{cases}$ **f)** $f(x) = \begin{cases} \frac{x-3}{x} & \text{si } x \in [-\infty, 2] \\ 5 & \text{si } x \in (2, 6) \end{cases}$ **g)** $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{2x} & \text{si } x < -1 \\ 4x+4 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

36. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ 2 & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$.

37. Halla el valor de k para que sea continua la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9} & \text{si } x \neq 3 \\ k & \text{si } x = 3 \end{cases}$.

38. Estudia la continuidad de las funciones:

- a)** $f(x) = |x|$ **b)** $f(x) = |4x - 12|$ **c)** $f(x) = |x^2 - 6x + 8|$

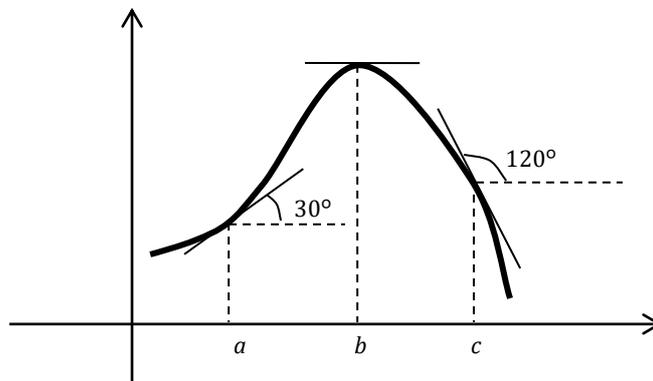
39. Dibuja la gráfica de una función $f(x)$ tal que $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 2$ y que todos los valores de la función sean mayores que 2.

40. Halla las asíntotas de las siguientes funciones:

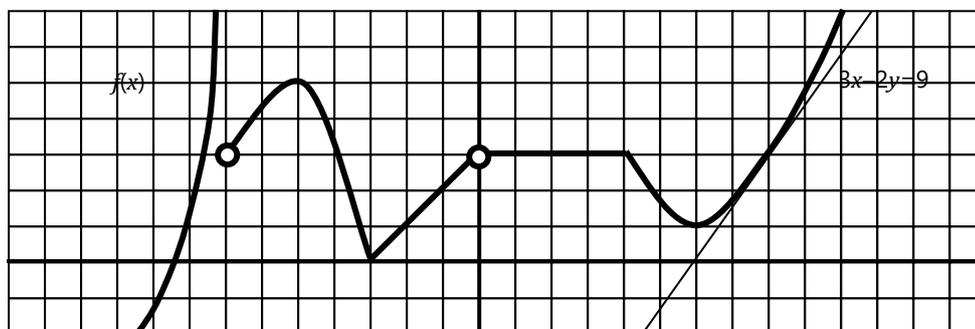
- a)** $y = -x^4 + 5x^2 + 4$ **b)** $y = \frac{5x+6}{2x^2-8}$ **c)** $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$
d) $y = \frac{8}{x^2+9}$ **e)** $y = \frac{3x^2+2x}{6+x}$ **f)** $y = -\frac{6x^3-5}{2x^2+5}$

10. Derivadas.

1. Sea la función $f(x) = 2x^2 + 3$.
 - a) Halla la tasa de variación en el intervalo $[-2, 5]$.
 - b) Halla la tasa de variación media en el intervalo $[1, 1+h]$.
 - c) Halla la tasa de variación instantánea en $x=1$.
2.
 - a) Halla la tasa de variación media de la función $f(x) = 4x^3 + x^2$ en el intervalo $[1, 3]$.
 - b) Halla la tasa de variación instantánea de la función $f(x) = 4x^3 + x^2$ en el punto $x=1$.
3. Mediante la definición (o regla general de derivación) halla la función derivada de la función $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$.
4. Mediante la definición (o regla general de derivación) halla la función derivada de la función $f(x) = x^3 - x + 6$ y calcula la derivada en el punto de abscisa $x=1$.
5. Halla la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = 2x^2 - 4$ en el punto de abscisa $x=3$.
6. Determina las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = x^2 + x$ en el punto de abscisa $x=0$.
7. ¿Cuánto valen $f'(a)$, $f'(b)$ y $f'(c)$ a la vista del dibujo siguiente?



8. Observa la figura:



¿Cuánto valen $f'(-5)$, $f'(6)$ y $f'(8)$? ¿En qué puntos la función no es derivable?

Halla las derivadas de las siguientes funciones:

9. $y = \frac{4}{7}$

12. $y = \sin^3 x$

15. $y = x + \sin x^3 - \cos^2 x$

18. $y = (6x^4 - 2) \sin 2x$

21. $y = \frac{7}{\sin^3 5x}$

24. $y = \operatorname{tg}(8x^2 - 6x)$

27. $y = \operatorname{cosec} \sqrt{x}$

30. $y = (8x^2 - 6x)^{\sin 4x}$

33. $y = \operatorname{arctg} \frac{x+4}{x-4}$

36. $y = \operatorname{arccotg} \sqrt[3]{2x}$

39. $y = 6x^3 \sqrt[3]{x} + \pi - \frac{1}{x\sqrt{x}}$

42. $y = \sqrt{\frac{x-7}{4x^2+x}}$

45. $y = 9e^{6x-7} \sin 5x^3$

48. $y = (\operatorname{tg} 4x - 3x)^{5x}$

51. $y = \sin x^2 + \sin^2 x$

54. $y = \frac{3}{5}x^5 - \frac{6}{7}x^3 - x + \frac{8}{x} - \frac{5}{x^2} + e$

57. $y = \frac{3x^2 - x^5}{\ln 2x}$

60. $y = 5^{\cos 3x} - \sin^2(2x+1)$

63. $y = 7 \cos \frac{3x^2-1}{x+2} - e^{x^2+1}$

66. Halla $f'''(x)$ si $f(x) = \ln(4x^2 - 9)$.

67. Encuentra un punto de la gráfica de la función $y = x^2 - 3x - 4$ en el que la recta tangente sea paralela a la recta de ecuación $x + y = 1$.

68. Halla k para que la pendiente de la recta tangente a la curva $y = \frac{kx+2}{3x-k}$ en el punto de abscisa $x=2$ valga 1.

69. Estudia el crecimiento de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $y = x^3$ en $x = -4$

b) $y = x^4 - 2x^2$ en $x = 6$

70. Estudia la monotonía y los extremos de las siguientes funciones:

10. $y = x^5$

13. $y = \cos x^2$

16. $y = 6 \log_2 x$

19. $y = \frac{x+5}{\ln x^2}$

22. $y = \sqrt{x^3 + 5x^2 + 2x - 7}$

25. $y = \operatorname{cotg} \frac{x-6}{3x^2}$

28. $y = 5^{2x+9}$

31. $y = \operatorname{arcsen} 7x^5$

34. $y = \operatorname{arcsec}(\ln x)$

37. $y = \frac{3x^5 - 2x^2 + 3}{5}$

40. $y = (2x^4 + 5x^2 - 8x)^6$

43. $y = \log_5(8x - \cos 3x)$

46. $y = \cos(x^3 - 3x)$

49. $y = \log x \cdot \cos^3 x$

52. $y = 2 \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x$

55. $y = (3 \cos x + 5x^2)^4$

58. $y = \log \left(\operatorname{tg} \frac{x}{4} \right)$

61. $y = [\ln(3x^4 + 6x)]^{\cos x}$

64. $y = \arccos \sqrt{x-3}$

11. $y = \log_4 x$

14. $y = \ln(\sin x)$

17. $y = 5x^3 + 7x^2 - 4x$

20. $y = (3x^2 + x - 9)^{-4}$

23. $y = \sqrt[5]{\cos 4x}$

26. $y = \sec(\log 3x)$

29. $y = e^{\operatorname{tg} x}$

32. $y = \arccos(x+2)$

35. $y = \operatorname{arccosec} 7x$

38. $y = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{9}x + \frac{6}{7}$

41. $y = \frac{x^3 - 5x - 1}{9x^2 + 3}$

44. $y = \frac{4x^2 + 7x - 3}{(x+5)^3}$

47. $y = \frac{2}{\sqrt[6]{x^2 - 4x}}$

50. $y = \log(x \cos^3 x)$

53. $y = \sin[\cos(\ln 6x)]$

56. $y = 6x \sin x^3$

59. $y = \sqrt[3]{\frac{2x-4}{x^3+2x}}$

62. $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

65. $y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

11. Repaso: Distribuciones unidimensionales.

1. Clasifica los siguientes caracteres estadísticos:

 - a) Número de habitantes de cada una de las capitales españolas.
 - b) Altura de cada uno de los soldados de un cuartel.
 - c) Espectáculo preferido por cada uno de los habitantes de una capital.
 - d) Número de páginas de cada uno de los libros de una biblioteca.
 - e) Materia sobre la que trata cada uno de los libros de una biblioteca.

2. Un vecino estudia el número de hijos en edad escolar de cada familia de un edificio de 20 familias. Los resultados son:

2 1 1 3 0 1 2 0 1 2
 3 3 4 2 3 4 2 2 6 4

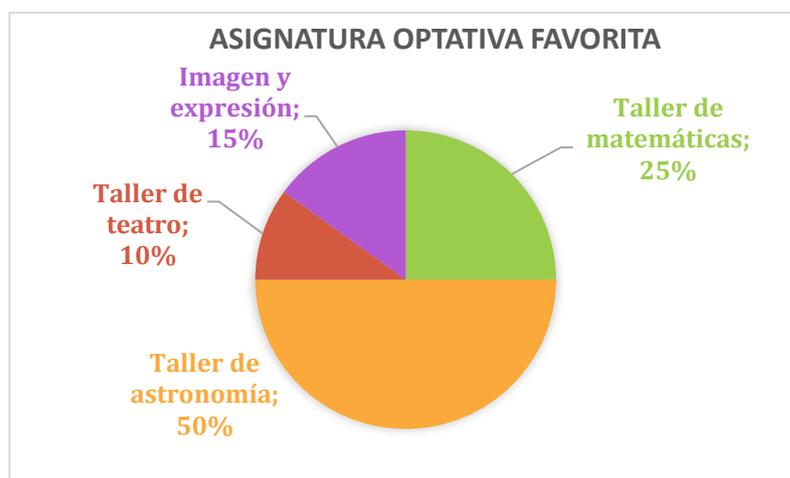
Construye la tabla de frecuencias correspondiente y elabora un gráfico adecuado.

3. Se han seleccionado 20 bombillas de un gran lote de fabricación y se ha probado su duración encendidas. El número de horas encendidas es el que sigue:

940 910 1100 1010 1070 1190 1000 990 1150 960
 1110 980 1000 990 1050 1010 940 1100 990 1000

Construye la tabla de frecuencias correspondiente y elabora un gráfico adecuado.

4. Interpreta el siguiente gráfico, que corresponde a las asignaturas optativas favoritas de los 300 alumnos de un centro de Secundaria, construyendo la tabla de frecuencias.



5. Completa los datos que faltan en la siguiente tabla estadística:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
f_i	4	4		7	5		7	
h_i	0,08		0,16	0,14				
F_i			16		28	38	45	

Calcula la media, la mediana y la moda de la distribución.

6. En una prueba de historia tipo test de 20 preguntas, los 18 estudiantes de una clase obtuvieron las siguientes puntuaciones: 12, 8, 14, 15, 9, 10, 18, 6, 9, 11, 16, 12, 9, 15, 7, 20, 18 y 9. Calcula la media, la moda, la mediana, el percentil P_{30} y su recorrido.
7. A los 100 estudiantes de 1º de bachillerato matriculados en un instituto se les pasa un test de cálculo de 100 ítems, cuyas puntuaciones han sido las siguientes:

Puntuaciones	[20, 30)	[30, 40)	[40, 50)	[50, 60)	[60, 70)	[70, 80)	[80, 90)	[90, 100]
Nº de estudiantes	8	8	12	20	18	14	12	8

Halla la media, la desviación media, la varianza, la desviación típica, el coeficiente de variación y el recorrido intercuartílico.

8. Un pediatra obtuvo la siguiente tabla sobre los meses de edad de noventa niños y niñas de su consulta cuando comenzaron a andar por primera vez.

Meses	[8,5-9,5)	[9,5-10,5)	[10,5-11,5)	[11,5-12,5)	[12,5-13,5)	[13,5-14,5)	[14,5-15,5]
Nº de niños	5	10	15	36	17	6	1

Halla la media, la mediana, la moda, la varianza, la desviación típica, el coeficiente de variación, el percentil P_{36} , el recorrido intercuartílico y el decil D_7 .

9. La media de puntos en un partido de los jugadores del equipo de baloncesto A es $\bar{x}_A = 19$ con desviación típica $\sigma_A = 3$ y la media de los jugadores del equipo de baloncesto B es $\bar{x}_B = 21$ con desviación típica $\sigma_B = 2$. María, que juega en el equipo A , ha anotado 21 puntos y Carlos, que juega en el equipo B , ha anotado 22 puntos. ¿Quién ha sido más efectivo respecto de sus respectivos equipos?
10. Un equipo de baloncesto necesita un alero. Se han seleccionado dos jugadores que, en los últimos cinco partidos, han anotado estos puntos:

Jugador A	16	14	13	13	14
Jugador B	25	10	8	6	21

¿Cuál de ellos elegirías?

12. Distribuciones bidimensionales.

1. Se considera la siguiente distribución bidimensional:

X \ Y	6	8	10	12
25	4	3	0	1
30	2	7	2	0
35	1	1	11	1
40	0	2	0	6
45	0	0	0	3

- Construye la tabla de las distribuciones marginales de X e Y .
 - Indica la distribución condicionada de la variable Y para el valor 30 de X .
 - Halla las medias y las desviaciones típicas de X e Y .
 - Halla la covarianza.
 - Representa la distribución mediante una nube de puntos.
 - Indica qué tipo de dependencia parece que existe entre X e Y .
 - Calcula el coeficiente de correlación lineal de Pearson e indica qué tipo de dependencia existe entre X e Y .
 - Halla la recta de regresión de X sobre Y .
2. La evolución de una determinada enfermedad en cierto país, a lo largo de cinco años, es la siguiente:

Año	1991	1992	1993	1994	1995
Nº de casos	3	7	19	96	105
Nº de muertos	3	7	18	92	90

Calcula las medias y las varianzas de las dos variables, y la covarianza de la variable bidimensional.

3. La siguiente tabla muestra los índices de las Bolsas de Tokio y Madrid durante la primera semana de octubre de 1987.

Tokio	25.721,7	25.862,5	26.018,3	26.089	25.952,3
Madrid	313	318,6	325,4	325,4	324,1

- Calcula la recta de regresión de los índices de Madrid respecto de los de Tokio.
 - Calcula el coeficiente de correlación lineal y da una interpretación del resultado obtenido.
4. El número de horas dedicadas por seis estudiantes para preparar un examen y la calificación obtenida en él se muestran en la siguiente tabla:

Nº de horas X	8	9	12	16	19
Calificaciones Y	6	5	7	8	9

- Calcula el coeficiente de correlación lineal.
- Encuentra la recta de regresión de Y sobre X .
- ¿Qué número de horas se estima que un estudiante debería haber estudiado para obtener un 10?

5. Determina las rectas de regresión de la siguiente distribución bidimensional:

X \ Y	8	9	10
3	4	13	3
5	6	7	7

Halla la varianza residual y el coeficiente de determinación.

13. Probabilidad.

1. Escribe el espacio muestral en los siguientes casos:
 - a) Lanzar una moneda y un dado a la vez.
 - b) Disparar a 4 blancos distintos y anotar si se acierta o no.
2. En una urna hay siete bolas numeradas del 1 al 7. Realizamos el experimento de sacar una bola y anotar el número. Se consideran los sucesos $A=\{1, 3, 5, 7\}$ y $B=\{2, 4, 6, 7\}$. Determina los siguientes conjuntos:
 - a) $A \cup B$
 - b) $A \cup \bar{B}$
 - c) $\bar{A} \cup B$
 - d) $A \cap B$
 - e) $A \cap \bar{B}$
 - f) $\bar{A} \cap B$
 - g) $(A \cup E) \cap B$
 - h) $(A \cap E) \cap (B \cup E)$
 - i) $(\bar{A} \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B})$
3. Se lanza 50 veces un tetraedro con las caras numeradas del 1 al 4, y se obtiene 14 veces el 1, doce el dos y 16 el tres. Halla las frecuencias absoluta y relativa de los sucesos $A=\{\text{salir número par}\}$ y $B=\{\text{salir tres}\}$.

4. Los resultados obtenidos al realizar una serie de lanzamientos de un dado marcado del 1 al 6, se recogen en la tabla.

Nº pruebas	10	50	100	200	400	500	700	900	1000
$f(2)$	1	8	18	34	68	80	116	151	167
$f(5)$	2	10	19	38	72	85	121	148	164

Halla las frecuencias relativas correspondientes a los sucesos “Salir 2” y “Salir 5”, representa estos valores en una tabla y deduce la probabilidad de ambos sucesos.

5. El 60% de la población de una ciudad lee el periódico A , el 40% lee el B y el 15% lee los dos. Halla el porcentaje de habitantes que no lee ninguno de los dos periódicos.
6. Un espacio muestral E tiene tres sucesos elementales A , B y C . Halla $p(A)$ si se sabe que $p(B)=2p(A)$ y que $p(C)=3p(B)$.
7. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número primo al lanzar un dado de seis caras numeradas del 1 al 6?
8. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 8 puntos al lanzar dos dados?
9. Elvira se sabe 18 unidades de las 22 de que consta el libro de Geografía. En un examen, por medio de bolas, se eligen dos unidades al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que se sepa las dos?
10. Un cajón contiene cuatro calcetines negros, seis marrones y dos azules. Si se toman dos calcetines al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ambos sean negros? ¿Y la de que ambos sean del mismo color?
11. En una bolsa hay 4 bolas, dos de ellas están marcadas con un 1 y las otras dos con un 2. Se hacen tres extracciones. Calcula la probabilidad de que el número formado por las tres bolas sea el 121, suponiendo que:
 - a) La bola se reintegra a la bolsa.
 - b) La bola no se devuelve a la bolsa.
12. Matías y Elena juegan con una moneda. La lanzan tres veces y si sale dos veces cara y una vez cruz o dos veces cruz y una vez cara, gana Matías. Si sale tres veces cara o tres veces cruz, gana Elena. Calcula la probabilidad que tiene cada uno de ganar.

- 13.** En una urna tenemos 100 bolas numeradas del 1 al 100. Se extrae una bola al azar y se anota su número x . Considera los siguientes sucesos:
 A : x es divisible por 5. B : x termina en 0. C : x es par.
 Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos: $A, B, C, A \cap C, B \cup C, A \cap \bar{B}, B \cap \bar{C}$.
- 14.** Un encuestador visita una finca que tiene tres patios a una determinada hora del día. En el primer patio hay 10 pisos, de los que 4 están vacíos a esa hora. En el segundo patio hay 14 pisos, estando 5 vacíos en esos momentos. En el tercer patio hay 10 pisos, 5 de ellos vacíos. El encuestador escoge un patio al azar y, dentro de ese patio, un piso al azar.
 Si sólo aceptan ser encuestadas el 70% de las personas a las que se les pide, ¿cuál es la probabilidad de que el encuestador consiga una entrevista con sólo llamar a la puerta?
- 15.** Una caja contiene 25 caramelos de limón y 15 de menta. Se extraen 2 caramelos al azar. Halla la probabilidad de que el primero sea de menta y el segundo de limón, con y sin devolución del primer caramelo.
- 16.** De una bolsa que contiene 5 bolas rojas, 10 negras y 12 azules se extraen 2 bolas al azar. Halla la probabilidad de que sean del mismo color.
- 17.** Se lanzan 5 monedas al aire. Halla la probabilidad de obtener al menos una cara.
- 18.** La siguiente tabla de contingencia muestra la distribución de 3 clases de 1º de Bachillerato de un centro escolar. Complétala.

Clase	Alumnos	Alumnas	Total
A	25		
B		18	31
C			32
Total	46		96

Se escoge un estudiante al azar. Calcula la probabilidad de que:

- a) Pertenezca a la clase A .
 - b) Sea alumna.
 - c) Sea alumna y esté en la clase B .
 - d) Esté en la clase C , sabiendo que es alumna.
 - e) Sea alumno, sabiendo que pertenece a la clase A .
- 19.** En un centro de enseñanza, el 55% de los estudiantes son chicas. Se sabe que el 65% de las alumnas no han estado enfermas durante el curso y que el 25% de los alumnos tampoco. Si se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que se haya encontrado enfermo?
- 20.** Completa la siguiente tabla sobre los candidatos a secretario de las Naciones Unidas.

Continente	Mujer	Hombre	Total
Europa	1		4
América	2		5
África		0	2
Asia	1		
Oceanía		1	
Total	6	9	

Halla la probabilidad de que el secretario:

- a) Sea mujer.
- b) Sea hombre y europeo.
- c) Sea mujer o de América.
- d) No sea africano.

14. Distribuciones de probabilidad.

1. Se considera un experimento que consiste en lanzar dos dados y anotar el resultado de la suma de los puntos de las caras. Halla:
- La función de probabilidad y su representación.
 - La función de distribución y su representación.
 - Media y desviación típica de la distribución.
 - Si X es la variable que expresa la suma del número de puntos de los dos dados, halla las siguientes probabilidades: $p(X \leq 5)$, $p(X \geq 10)$, $F(4)$, $F(-2)$, $F(19)$.

2. Una variable aleatoria discreta tiene la siguiente función de probabilidad:

X	2	3	5	6	8
p	0,2	0,1	0,4	0,2	0,1

- Halla la función de distribución de dicha variable.
 - Representa en un diagrama la función de distribución.
 - Halla la media y la desviación típica.
3. Sea X una variable aleatoria cuya función de probabilidad viene dada por $p(X=r) = \frac{1}{8}, (r=2,3,\dots,9)$.
- Representa la función de probabilidad.
 - Halla la función de distribución y su representación.
 - Media y desviación típica.
 - $p(X \geq 6)$, $p(4 < X < 7)$, $p(X < 3)$.
4. Un miembro del Consejo de Administración de una empresa ha comprobado que, si bien todos los años tienen una junta, ha habido años que tienen hasta cinco. Por la experiencia acumulada durante años sabe que el número de juntas anual se distribuye con arreglo a la tabla adjunta.

Número de juntas al año	1	2	3	4	5
Probabilidad	2/15	5/15	1/15	3/15	4/15

Halla:

- La función de probabilidad y su representación.
 - La función de distribución y su representación.
 - La media.
 - La varianza y la desviación típica.
 - La probabilidad de que en un año escogido al azar se celebren más de tres juntas.
5. En una ferretería quedan 100 bombillas, de las que se sospecha que el 2% están fundidas. ¿Cuál es el valor esperado de bombillas fundidas? Calcula también la varianza y la desviación típica.
6. Una prueba de inteligencia está compuesta por 10 preguntas, cada una de las cuales tiene 4 respuestas, siendo sólo una de ellas correcta. Un alumno tiene prisa por acabar la prueba y decide contestar "a lo loco", es decir, aleatoriamente. Se pide:
- La probabilidad de acertar exactamente 4 preguntas.
 - La probabilidad de no acertar ninguna.
 - La probabilidad de acertar todas.
 - La probabilidad de acertar al menos 8.

- e) La probabilidad de acertar a lo sumo 3.
f) La media y la varianza.
7. La probabilidad de que un estudiante obtenga el título de licenciado en Geografía e Historia es 0,3. Halla la probabilidad de que de un grupo de siete estudiantes matriculados en primer curso:
- a) Ninguno de los siete finalice la carrera.
b) Finalicen todos.
c) Al menos dos acaben la carrera.
d) Halla la media y la desviación típica.
8. Los resultados de una estadística sociológica sobre el nivel de aceptación de un determinado partido político, ha revelado que el 25% de la población es favorable a dicho partido, siendo desfavorable el resto. En una encuesta realizada telefónicamente sobre 10 personas elegidas al azar, se desea saber:
- a) Probabilidad de que únicamente tres sean favorables al partido.
b) Probabilidad de que al menos uno sea favorable.
c) Probabilidad de que a lo sumo uno se muestre favorable.
9. Para una distribución $N(0, 1)$, calcula:
- a) $p(Z \leq 1,47)$ b) $p(Z \leq -2,21)$ c) $p(Z > 1,67)$ d) $p(1,23 < Z \leq 1,67)$
e) $p(-2,31 < Z \leq -1,2)$ f) $p(-1,12 < Z \leq 2,45)$ g) $p(-1 < Z \leq 1)$ h) $p(-1,96 < Z \leq 1,96)$
10. La variable X sigue la distribución $N(10; 1,2)$. Calcula:
- a) $p(X > 11,17)$ b) $p(X \leq 9,12)$ c) $p(9,23 < X \leq 10,64)$ d) $p(9 < X \leq 9,8)$
11. Se ha aplicado a 300 alumnos de sexto de Primaria un test de agresividad y se ha observado que las puntuaciones se distribuyen normalmente con media 30 y desviación típica 12. Se pide:
- a) ¿Qué proporción de alumnos tendrán puntuación entre 20 y 35?
b) ¿Cuántos alumnos tendrán una puntuación superior a 42?
12. Las tallas de los individuos de una población se distribuyen normalmente con media igual a 175 cm y desviación típica igual a 8 cm. Calcula la probabilidad de que un individuo tenga una talla:
- a) Mayor que 180 cm. b) Menor que 170 cm. c) Entre 170 y 180 cm.
13. Los pesos de los individuos de una población se distribuyen normalmente con media de 70 kg y desviación típica de 6 kg. De una población de 2000 personas, calcula cuántas tendrán un peso comprendido entre 65 y 75 kg.
14. Se ha comprobado que la probabilidad de tener un individuo ojos oscuros es 0,6. Sea X la variable aleatoria que representa el número de individuos que tienen los ojos oscuros de un grupo de 1100.
- a) Escribe la ley de probabilidad de la variable X .
b) Halla $p(670 < X \leq 675)$.
15. Supongamos que la probabilidad de nacer varón en España es de 0,512. Si durante un año en una determinada región se han producido 20000 nacimientos, ¿cuál es la probabilidad de que el número de varones esté entre 1080 y 1120?